SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XIII. — (Anni LXXXII-LXXXIV)

ottobre 1942 — dicembre 1945

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566
1945

Pubblicato il dì 28 marzo 1946

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XIII. — (Anni LXXXII-LXXXIV)

ottobre 1942 — dicembre 1945

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566
1945

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

DURANTE L'ANNO 1941-42

letta nell' adunanza del dì 5 dicembre 1942

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Consoci,

Mentre perdura l' immane conflitto, che ormai ha investito tutto il mondo accrescendo nelle nazioni belligeranti la già lunga serie di lutti e di rovine, è per noi motivo di legittima soddisfazione constatare come la guerra non abbia finora interrotto, nel nostro paese duramente provato dal grande flagello, il ritmo della vita civile; sicchè anche le operose e serene forze del lavoro e del pensiero continuano ad assolvere il proprio còmpito con l' intento di contribuire al vantaggio della collettività e di accrescere il prestigio e la potenza spirituale della Patria.

Anche il nostro Sodalizio ha continuato con la consueta alacrità ad adempiere la propria missione di cultura e di civiltà, incoraggiando le ricerche scientifiche dei giovani e pubblicando lavori numerosi, tanto di soci che di estranei. Il volume del Rendiconto testè pubblicato accoglie infatti non meno di 40 note, senza tener conto di altre undici già accettate e di cui per il ritardo degli autori dovette essere differita la stampa, e oltre a 4 memorie accolte per l' inserzione nel volume degli Atti, del quale i continuati aiuti della benemerita Direzione generale del Banco di Napoli ci permettono di non interrompere la pubblicazione

Cominciando, come al solito, la nostra breve rassegna annuale di questa attività accademica dai contributi astronomici, ricordiamo una nota del prof. Tito Nicolini, la quale tratta de *Il periodo medio dell' attività solare in relazione alle osservazioni antiche e moderne*. Inquadrando tutte le osservazioni sparse irregolarmente in 24 secoli in una successione coerente col ciclo solare, e riferendosi, per quelle antiche, principalmente alle osservazioni di macchie solari visibili ad occhio fatte dai cinesi, e a quelle di

aurore boreali di maggior risalto, egli trova che le epoche considerate corrispondono in modo soddisfacente ai massimi presumibili della periodicità undecennale stabilita dalle osservazioni moderne, e che di conseguenza dal 465 av. Cr. al 1937 si ha un periodo medio di anni 11,07, con 217 periodi interposti, e con una variazione secolare assai piccola.

Parecchi sono stati i contributi riguardanti le matematiche pure ed applicate. In un lavoro del socio straniero AZEVEDO DO AMARAL viene esposto un metodo per risolvere una equazione differenziale lineare completa per integrali definiti, nel quale si riscontra una certa arbitrarietà nella scelta del nucleo e dei limiti di integrazione. Il metodo si applica anche per la risoluzione di equazioni integrali di FREDHOLM di prima specie.

In una nota *Sul prolungamento analitico* il prof. Antonio COLUCCI assegna criteri per il prolungamento analitico di una funzione sopra un insieme perfetto, estendenti quelli noti di PAINLEVÉ.

Continuando i suoi studi sopra le curve algebriche, il prof. Federico AMODEO ha trattato di *Alcune applicazioni del carattere della gonalità*, dimostrando che le curve di ordine M e di genere p sono classificabili in diversi tipi ben precisabili di differenti gonalità, che in generale non sono trasformabili birazionalmente fra loro, pur essendo tutte riducibili a curve piane dello stesso numero di punti doppi.

Anche la nota del prof. Guido BARBA sopra *Questioni di convergenza e teorema di* HADAMARD *per le serie di* DIRICHLET *e le serie di potenze « generalizzate » gruppali* è la continuazione di un precedente studio, pubblicato nel nostro Rendiconto, che viene ricollegato a quello di serie di potenze « generalizzate » (per le quali, cioè, gli esponenti non sono necessariamente numeri interi), serie soddisfacenti anch'esse a proprietà gruppali analoghe a quelle imposte alle serie di DIRICHLET. Si vengono a stabilire, così, talune questioni di convergenza e si fa vedere che per le serie di potenze « generalizzate » vale il teorema di CAUCHY-HADAMARD.

Il prof. Giuseppe GIUGA in una sua nota *(Alcune estensioni del determinante di* VANDERMONDE) ha calcolato svariati determinanti, i cui valori si esprimono generalmente in funzione di uno o più determinanti di VANDERMONDE, ha rivendicato al TRUDI la proprietà sopra un notevole vandermondiano, del quale ha dato una nuova calcolazione, ne ha considerato uno affine, ed ha generalizzato entrambi in più modi.

Di *Equazioni algebriche nelle algebre del 4.° ordine dotate di modulo* si occupa, in una nota, la prof. Anna ROCCO BOSELLI, calcolando il numero delle radici di una equazione algebrica di grado r nelle nove algebre commutative dotate di modulo, del 4.° ordine, e il numero delle radici delle equazioni speciali a destra e a sinistra di grado r, nelle sette algebre non commutative del 4.° ordine dotate di modulo. Vengono altresì calcolati gli elementi pseudonulli e le sottoalgebre eccezionali nelle sedici algebre predette, controllando volta per volta il teorema di SPAMPINATO. Al medesimo

campo di indagini si riferisce una memoria della stessa autrice su *Le serie di potenze nelle sedici algebre complesse del 4.° ordine dotate di modulo*, accolta per la stampa nel secondo volume degli Atti accademici. In questo lavoro si determina la forma che assumono le serie di potenze nelle varie algebre complesse del 4.° ordine dotate di modulo e, in particolare per le algebre non commutative, si determina quali sono le serie speciali, cioè le serie che nel loro campo circolare di convergenza determinano una funzione totalmente derivabile a destra o a sinistra.

Diversi lavori sono dovuti all' attività del nostro socio corrispondente Giulio ANDREOLI. Per ciò che riguarda le scienze statistiche, egli, prendendo lo spunto da altre sue analoghe ricerche precedenti, ha impostato, in una nota, gli *elementi matematici di base* su cui si può costruire una teoria statistico-matematica delle collettività biologiche. Una questione basilare di carattere molto più generale ha formato l' oggetto di un' altra nota, nella quale ha discusso l' *Interpretazione probabilistica di teorie logiche e matematiche relative a fenomeni concreti*, impostando il problema del valore della logica, e in genere dei ragionamenti scientifici, nella costruzione e nell' applicazione di una qualsiasi teoria. In altro lavoro, partendo dalla relazione di STIEFEL che esprime un coefficiente binomiale come somma di due altri di base minore ed assumendola come equazione alle differenze, ha delineato le principali proprietà della soluzione di questa e di altre analoghe equazioni, inclusovi un certo gruppo di trasformazioni in sè stesse. Una separata pubblicazione, riguardante *Equazioni differenziali e funzioni metageometriche*, ha per oggetto una generalizzazione delle funzioni ipergeometriche, formando l' equazione differenziale da essa soddisfatta, e mette in rilievo la connessione fra tale ricerca ed altre sulle equazioni differenziali e sui coefficienti binomiali. In una quinta nota, infine, relativa alle *Equazioni algebriche nei corpi numerici*, sono stati presi in esame i corpi algebrici collegati ad un corpo numerico formato dai resti rispetto ad un modulo primo, e si è dimostrato come le soluzioni si possono sempre ottenere mediante risoluzioni di equazioni quadratiche, per estrazione di radici quadrate.

Continuando le sue indagini sugli *Elementi matematici per l' economia corporativa*, il prof. Giuseppe PALOMBA ha posto in evidenza, in una nota, la legge di dualità esistente fra il problema della produzione posto in economia classica ed il medesimo problema posto in economia corporativa, cercando di chiarire quali concetti debbano fra loro scambiarsi per passare dall' uno all' altro dei due, e mostrando come, in generale, il problema dei classici non sia che un caso particolare del problema corporativo.

Varie note riguardanti la scienza delle costruzioni sono dovute al prof. Franco JOSSA. In una di esse l' autore ha dato notizia dei *Risultati di alcune esperienze sulle proprietà meccaniche di ferri normali e di ferri meccanicamente incruditi sottoposti preliminarmente a moderate ripetute sollecitazioni dinamiche*, deducendo che per il ferro incrudito, che presenta

notevole vantaggio rispetto al normale nella resistenza a trazione statica, cresce, dopo il trattamento, tale vantaggio, mentre scompare l'analogo svantaggio nei riguardi delle sollecitazioni dinamiche. I risultati ottenuti appaiono particolarmente interessanti, in relazione alla convenienza di armare le travi di calcestruzzo cementizio con ferri incruditi. In altra nota è stato esposto, dal medesimo autore, un metodo di calcolo per i telai multipli, mediante il quale si ottengono coefficienti d'influenza, e, partendo da uno schema semplice, p. es. dal portale semplice, s'introduce gradualmente la solidarietà con gli altri telai. Tale metodo, mentre conserva in gran parte i vantaggi di quello, comunemente adoperato, delle rotazioni ai nodi, offre quelli di fornire risultati d'influenza, e di consentire, attraverso l'introduzione successiva delle incognite, di arrestare il calcolo, e quindi la considerazione della solidarietà tra i diversi telai, quando si sia raggiunta l'approssimazione che si desidera. Un terzo lavoro riguarda *Osservazioni sul calcolo statico delle piastre sottoposte a carichi proporzionali agli abbassamenti*; e un quarto, che rappresenta l'applicazione di concetti esposti in una precedente nota, riflette il *Calcolo di prismi a sezione rettangolare sollecitati a flessione semplice in regime non di* HOOKE, con la indicazione della via più opportuna per eseguire, con l'ausilio di diagrammi, i calcoli di verifica e di progetto.

In una nota sulla *Instabilità nell'equilibrio d'una volta-trave* il prof. Adriano GALLI ha determinato il valore critico del peso di una volta-trave autoportante applicando il metodo energetico, sullo spirito del teorema di DIRICHLET, facendo intervenire nella espressione della energia totale i termini d'ordine superiore negli spostamenti. La ricerca, che ha permesso all'autore di giungere ad una formola approssimata del carico critico, ha importanza nelle applicazioni della tecnica costruttiva, specialmente in rapporto alle moderne forme architettoniche.

Sul *Calcolo statico dei telai elastici spaziali* ha pubblicato una nota l'ing. Guido GUERRA, studiando la possibilità di applicare il metodo delle deformazioni, in una forma analoga a quella data dal TAKABEYA per i telai elastici piani, allo studio dei telai elastici a tre dimensioni.

De *L'estensimetro a base fissa nella determinazione di allungamenti unitari non uniformi* si occupa, in altro lavoro, l'ing. Mario TURRA, accennando al procedimento di RUEHL-FISCHER mediante il quale è possibile rilevare, con speciali tipi a base variabile, allungamenti unitari anche nei casi in cui l'impiego dei prismi non si mostra ordinariamente adatto, ed esponendo un procedimento mediante il quale si rende superfluo, nei detti casi, ricorrere ad estensimetri a base variabile.

Molteplici contributi nello stesso campo di indagini sono dovuti all'attività dell'ing. Franco MAZZARELLA. In una nota egli si occupa della *Determinazione della pressione esercitata su di un suolo elastico da una trave appoggiata su di esso*; in un'altra studia la *Determinazione del « risultante*

di due equazioni» per la ricerca delle tensioni ideali massime nel cilindro circolare soggetto a flessione, torsione e taglio; in una terza considera la *Applicazione del metodo* Cross *al calcolo dei telai a nodi spostabili*; in una quarta, infine, ricava alcune proprietà relative alla *Distribuzione delle tensioni tangenziali negli archi piani a grande curvatura.*

Sempre nel campo della scienza delle costruzioni, è da ricordare ancora una nota dell'ing. Giuseppe Sambito, il quale studia le coazioni e le sollecitazioni che nascono negli archi elastici a grande curvatura, per effetto di variazioni non lineari della temperatura nell'interno dell'arco, ed applica i risultati ottenuti ad alcuni tipi comuni nelle applicazioni tecniche.

Passando alle ricerche fisiche, ricordo una nota del prof. Giovanni Platania *Su gli aloni*, nella quale in base ad una dettagliata statistica dei vari fenomeni alonari osservati a Napoli nel periodo di 18 anni, dal 1922 al 1939, l'autore deduce un andamento periodico della frequenza nel corso dell'anno, e dimostra che queste meteore ottiche non sono da noi così rare come generalmente si crede, e che oltre alle forme più comuni si osservano anche qui le forme rare.

A particolari ricerche elettrotecniche si riferisce una nota del prof. Mario Jacopetti, il quale ha continuato le sue indagini su *L'attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini.* Esposti il dispositivo sperimentale e la tecnica di misura adottati per poter eseguire lo studio dell'attacco anodico delle grafiti negli elettrolizzatori a diaframma e controcorrente per l'elettrolisi dei cloruri alcalini, in modo da riprodurre esattamente le condizioni dell'effettivo funzionamento industriale, egli ha riferito, in questa seconda nota, i risultati relativi alla influenza che esercitano la durata di funzionamento, la densità di corrente, la temperatura e la concentrazione alcalina nell'effluente catodico. In altro lavoro sopra il *Rendimento di energia degli elettrolizzatori a diaframmi filtranti per cloruro sodico* lo stesso autore, fermando la sua attenzione sul rendimento di voltaggio e sui vari termini che lo costituiscono (potenziale di equilibrio. sovratensione complessiva e caduta ohmica), ha approfondito lo studio di questi tre termini ed ha preso in particolare esame da un lato la sovratensione complessiva, per cui si dà una formula che ne rappresenta l'andamento al variare della densità di corrente, e, dall'altro, la caduta ohmica, stabilendo le relazioni che passano tra questa grandezza e la caduta istantanea di tensione, la quale si verifica all'interrompersi della corrente alimentatrice. Il metodo di registrazione della caduta istantanea di tensione, elaborato dall'autore, permette di giungere ad una misura precisa della cosidetta tensione di saturazione, che generalmente coincide con la tensione minima di decomposizione.

Altri lavori, in un campo affine di indagini, sono dovuti al prof, Ugo Beretta. In una nota, riflettente *Studi energetici sui fenomeni di elettrolisi,* egli si è proposto lo scopo di controllare sperimentalmente la ripartizione

dell'energia elettrica impiegata durante il processo di elettrolisi tra lavoro chimico ed effetto termico, ed ha eseguito alcune misure adoperando elettrolizzatori costruiti in modo da poter funzionare direttamente come calorimetri e avvalendosi di uno speciale dispositivo, che gli ha permesso di valutare la caduta istantanea della tensione. In un'altra nota, su *La decomposizione della nitrammide*, che continuando precedenti ricerche espone i risultati di nuove misure della velocità di decomposizione della nitrammide in soluzioni acquose di acido cloridrico diluito in presenza di cloruri dei metalli alcalini, lo stesso autore conferma l'azione depressiva dei sali sulla velocità di decomposizione, deducendo che l'ammontare della depressione dipende dalla natura dei cationi, i quali agiscono in misura crescente quando si passa dal litio al sodio e dal sodio al potassio. L'azione deprimente viene attribuita ad una sottrazione di molecole di acqua per idratazione degli ioni.

Di particolari sue *Ricerche sulla fitina* ha dato notizia il prof. Mario COVELLO, il quale allo scopo di portare un contributo alla conoscenza, ancora incompleta, della costituzione di questo importante composto fosforganico di riserva diffusissimo nel regno vegetale, prende in esame l'azione della fitasi dell'orzo sul fitinato di sodio naturale in funzione del pH, del tempo, della concentrazione di enzima e di quella del substrato.

Nel campo mineralogico, il nostro collega SCHERILLO, che si propone di studiare sistematicamente le lave vesuviane man mano che verranno emesse dal vulcano, ha iniziato le sue ricerche con una nota, nella quale, dopo aver dato il quadro delle analisi chimiche delle lave vesuviane più note, allo scopo di stabilire gli opportuni confronti, esamina le vesuviti dell'ottobre-dicembre 1940, le quali — eccezion fatta per il più alto tenore in Na_2O — si avvicinano notevolmente alla lava dell'anno 1631.

Fra i lavori d'interesse geologico, sono anzitutto da segnalare due note del nostro presidente senatore DE LORENZO, una delle quali è destinata ad illustrare un disegno del cratere del Monte Nuovo, eseguito dal noto disegnatore portoghese Francisco DE HOLLANDA nel febbraio del 1540, cioè dopo poco più di un anno dalla celebre eruzione che diede origine al M. Nuovo; mentre la seconda riproduce e commenta un antico *Jàtaka* indiano allo scopo di mostrare, come già parecchi secoli prima dell'èra volgare in India si conosceva l'esistenza di acque freatiche nel sottosuolo dei deserti e le si utilizzavano, facendole scaturire con lo scavo di pozzi più o meno profondi.

Un'altra nota geologica, dovuta all'ing. Roberto SIGNORINI, delinea lo sviluppo della formazione gessoso-solfifera del bacino del Neto in Calabria, la quale affiora all'orlo settentrionale e occidentale dei terreni pliocenici, tra il massiccio cristallino della Sila e il mare Jonio, ed offre un duplice particolare interesse, per l'esistenza di giacimenti di zolfo suscettibili di sfruttamento industriale e per la presenza di argille scagliose, probabilmente eoceniche, che l'autore ritiene quale frana o colata di materiali

giunti nella zona durante la sedimentazione della serie gessifera, cioè nel Miocene superiore.

Di particolari indagini antropogeografiche s'è infine occupato il prof. Francesco CASTALDI, il quale in una sua memoria, inserita nel volume degli Atti, ha studiato *L'abitazione a corte in Sardegna e l'origine mediterranea della corte*. Descritto questo tipo di abitazione, che si rinviene nel Campidano, e confrontandolo con altri tipi di analoghe abitazioni diffuse in altre regioni d'Italia, egli conclude che la corte sarda ha mantenuto nel tempo integralmente il tipico carattere strutturale di abitazione mediterranea, come puro schema architettonico, non subordinato a particolari funzioni economiche.

Il nostro Rendiconto ha accolto pure alcune commemorazioni destinate a tramandare il ricordo dei più stimati consoci scomparsi in questi ultimi anni. Al prof. Gaetano QUAGLIARIELLO è dovuta la commossa e dotta rievocazione di Filippo BOTTAZZI, una delle maggiori figure della Fisiologia italiana contemporanea; al prof. Mauro PICONE quella di Ernesto PASCAL, il matematico insigne, che per quasi mezzo secolo alla nostra Accademia diede i frutti migliori del suo versatile ingegno e fornì prove numerose del suo attaccamento e della sua attività, ricoprendo le cariche più svariate.

Fra le più notevoli comunicazioni verbali, con le quali alcuni colleghi hanno voluto opportunamente ricordare la parte da essi presa alle recenti celebrazioni dei nostri sommi scienziati, mi piace di segnalare quella del socio CARNERA, che riferendo sulle cerimonie preparate dall'Università di Padova nella scorsa primavera per ricordare Galileo GALILEI in occasione del terzo centenario della morte, ha promesso, accogliendo il desiderio espresso dall'Accademia, di preparare per gli Atti una memoria che possa illustrare anche l'aspetto fisico dell'opera di Galileo, meno adeguatamente messo in luce nelle recenti commemorazioni.

Ottenuta dal Ministero dell'Educazione Nazionale l'autorizzazione ad espletare i concorsi a premio banditi per l'anno 1940, l'Accademia ha giudicato quello al premio triennale Agostino OGLIALORO TODARO, scaduto il 31 gennaio 1941 - XIX, al quale avevano partecipato due concorrenti, laureati in Chimica pura nella R. Università di Napoli. Accogliendo la proposta formulata dalla Commissione BAKUNIN, GIORDANI e MALQUORI, venne proclamato vincitore il dott. Antonio GIANNONE.

Come è noto, restano tuttora sospesi, per effetto di una disposizione di carattere generale, durante lo stato di guerra, gli altri concorsi a premio.

Si è proceduto, nello scorso giugno, alle proposte di nomina di alcuni soci nelle varie categorie. Con Decreto Reale del dì 8 agosto sono entrati a far parte dell'Accademia, in qualità di soci ordinari nella Sezione di Scienze naturali, i professori Eccellenza Filippo SILVESTRI e Alberto DE DOMINICIS, e, quali soci ordinari nella sezione di Scienze matematiche, i

professori Gian Domenico MATTIOLI e Nicolò SPAMPINATO. Con autorizzazione del 17 agosto, il Ministro dell'Educazione Nazionale ha poi approvato la nomina del prof. Antonio SCHERILLO a socio corrispondente nella sezione delle Scienze naturali. I nuovi colleghi, la maggior parte dei quali erano già legati a questa Accademia per averne fatto parte in altra categoria o per aver contribuito, con i propri lavori, all'incremento delle nostre pubblicazioni, e che per entrambe le ragioni ci sono ugualmente cari, accresceranno senza dubbio le forze vive del nostro Sodalizio e tenderanno con noi a mantenerne alta la secolare e nobile tradizione, sopratutto in questa epoca così densa di eventi e ricca di fortune per la patria nostra.

Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse [1]).

Nota della dott. **Maria Laura Ettorre**, *presentata dal socio ord.* **M. Picone**

(Adunanza del dì 4 aprile 1942 - XX)

Sunto. — Viene esposto ed applicato al caso di un'ellisse un metodo, in uso presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, atto alla calcolazione numerica degli autovalori dell'equazione $\Delta_2 u + \lambda^2 u = 0$, con la condizione al contorno $u = 0$, interessante le vibrazioni di una membrana.

1. Il calcolo delle frequenze nelle vibrazioni di una membrana elastica a contorno piano fisso, la quale nella sua posizione di riposo coincida con un dominio limitato D del piano xy, consiste nel calcolo degli autovalori λ nel problema di integrazione dell'equazione differenziale, in D,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0,$$

con la condizione al contorno

$$u = 0.$$

Il problema è classico ed è stato ad esso dedicato un trattato dal Pockels [2]), nonchè ricerche del Mathieu [3]). In opportune ipotesi di regolarità del dominio D, si dimostra l'esistenza di infiniti autovalori λ^2, che riescono tutti reali e positivi ed il cui insieme non ha punti di accumulazione al finito. Quanto all'effettivo calcolo numerico dei detti autovalori, ben poco si è ancora fatto. Formule adatte per il loro calcolo si possiedono solo per forme speciali del dominio D, per es.: quando esso è un rettangolo, o un

---

[1]) Lavoro del Laboratorio di Analisi Superiore della R. Università di Roma, eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[2]) F. Pockels, *Ueber die partielle Differentialgleichung: $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik*, Leipzig 1891.

[3]) E. Mathieu, *Cours de physique mathématique*, Paris 1873, pagg. 112-157. Vedi anche: G. Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, vol. II, Bologna 1940, pagg. 247-268. Courant-Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. I, Berlin 1931, pagg. 255-263. A. Weinstein, *Étude des spectres des equations partielles de la théorie des plaques élastiques*, Mémorial des Sciences Mathématiques, n. 88.

settore circolare, o è limitato da due ellissi omofocali, oppure è il quadrilatero limitato da due ellissi e da due iperboli omofocali.

Non vi sono, a quanto pare, formule adatte per il calcolo numerico nel caso in cui il dominio D sia un'ellisse. A tale calcolo il MATHIEU ha dedicato un'ampia memoria nella quale però egli è riuscito solo a dare sviluppi in serie di opportune trascendenti i cui zeri sono gli indicati autovalori; data però la lenta convergenza di tali serie, il calcolo dei relativi zeri riesce di approssimazione assai scarsa.

Nel presente lavoro si è voluto saggiare per tale calcolo un metodo già da tempo in uso presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, che si può chiamare dei « *momenti* ». Nelle pagine che seguono è data una esposizione del metodo, considerato nel caso particolare che ci interessa, e sono sviluppati tutti i calcoli che ci hanno condotto ad una sufficiente approssimazione numerica della più bassa frequenza della membrana ellittica, mentre sono dati tutti i fondamenti necessari al calcolo numerico delle successive frequenze.

Assunto come unità il semiasse maggiore dell'ellisse e detto q il semiasse minore, la seguente tabella:

TABELLA I.

q	λ_{01}	q	λ_{01}
1	2,405	0,5	3,78
0,9	2,54	0,4	4,53
0,8	2,72	0,3	5,81
0,7	2,96	0,2	8,43
0,6	3,29	0,1	16,40

fornisce gli autovalori più bassi in funzione di q con un errore, relativo minore di $1/10^3$ per $q = 1$ e di $1/10^2$ per gli altri valori considerati di q.

Dai valori di λ si deducono quelli delle corrispondenti frequenze vibratorie σ in base alla formula:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{\delta}}$$

rappresentando S la tensione agente sulla membrana e δ la densità superficiale.

Si è trovato altresì che un'elegante formula che fornisce con approssimazione, in pratica sufficiente, i detti autovalori più bassi di λ è la seguente

$$\lambda_{01} = \mu_{01} \sqrt{\frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2}} \qquad (1,1)$$

dove μ_{01} è il più piccolo zero positivo della funzione di Bessel $J_0(\mu)$. Di tali formule approssimate se ne hanno anche per alcune delle successive frequenze ed esse si trovano indicate nel testo del presente lavoro.

Ovviamente per un ellisse di semiasse maggiore a e minore b la formula (1, 1) si scrive:

$$\lambda_{01} = \mu_{01} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} . \tag{2, 1}$$

2. Data un' ellisse E di semiasse maggiore 1 e minore q, ci si propone la ricerca degli autovalori del parametro λ nell' equazione

$$\Delta_2 u + \lambda^2 u = 0 \quad , \quad (\text{in } E) \tag{1, 2}$$

con la condizione

$$u = 0 \quad , \quad (\text{su } FE). \tag{2, 2}$$

Con la trasformazione di coordinate

$$x = \rho \cos \theta \qquad y = q\rho \sin \theta, \tag{3, 2}$$

che trasforma l' ellisse E nel rettangolo del piano cartesiano $\rho\theta$:

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

l' equazione (1, 2) diventa:

$$\left(\cos^2\theta + \frac{1}{q^2}\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{q^2} - 1\right)\frac{\sin 2\theta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\, \partial \theta} + \left(\sin^2\theta + \frac{1}{q^2}\cos^2\theta\right)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \left(\sin^2\theta + \frac{1}{q^2}\cos^2\theta\right)\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \left(\frac{1}{q^2} - 1\right)\frac{\sin 2\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \lambda^2 u = 0, \tag{4, 2}$$

mentre la condizione al contorno (2, 2) si muta nella

$$u(1, \theta) = 0. \tag{5, 2}$$

Poniamo nella (4, 2) lo sviluppo di Fourier

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2} u_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} [u_k(\rho) \cos k\theta + v_k(\rho) \operatorname{sen} k\theta], \tag{6, 2}$$

ove i coefficienti $u_0(\rho)$, $u_k(\rho)$, $v_k(\rho)$ sono legati alla $u(\rho, \theta)$ dalle note formole:

$$(7,2)\qquad \begin{gathered} u_0(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)\, d\theta, \\ u_k(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \cos k\theta\, d\theta \quad , \quad v_k(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \operatorname{sen} k\theta\, d\theta. \end{gathered}$$

Osserviamo subito che questi coefficienti devono soddisfare a certe condizioni. Ed invero l'autosoluzione $u(x, y)$ dovrà risultare analitica regolare nel punto $(0, 0)$, vale a dire nell'intorno di tale punto essa dovrà ammettere uno sviluppo del tipo

$$u(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij}\, x^i y^j ;$$

ne discende, per le (3, 2), quest'altro sviluppo

$$u(\rho, \theta) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij}\, Q^j \rho^{i+j} \cos^i\theta \operatorname{sen}^j\theta,$$

valido per ρ abbastanza piccolo. Da quest'ultima formola e dalle (7, 2) si ricava:

$$(8,2)\qquad u_k(\rho) = \frac{1}{\pi} \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{i,j}\, Q^j \rho^{i+j} \int_0^{2\pi} \cos^i\theta \operatorname{sen}^j\theta \cos k\theta\, d\theta,$$

e analogamente per $u_0(\rho)$ e $v_k(\rho)$. Nella (8, 2) sono nulli tutti gli integrali nei quali la somma $i + j$ è minore di k o ha parità diversa da quella di k e perciò nello sviluppo di $u_k(\rho)$ mancheranno tutti i termini che contengono potenze di ρ con esponenti minori di k o avente parità diversa da k. Dunque *le* $u_k(\rho)$ *e* $v_k(\rho)$ *devono essere infinitesime di ordine* k *per* $\rho = 0$, *e devono essere funzioni pari o dispari secondochè* k *è pari o dispari.*

Ciò premesso, è evidente che ponendo lo sviluppo (6, 2) nella (4, 2) si ottiene una relazione lineare omogenea tra le infinite funzioni $u_k(\rho)$, $v_k(\rho)$ e loro derivate prime e seconde, con coefficienti dipendenti da ρ e da θ. Se di tale equazione prendiamo successivamente i momenti rispetto alle infinite funzioni

$$1, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta, \ldots$$

otteniamo altrettante equazioni differenziali lineari omogenee nelle $u_k(\rho)$, $v_k(\rho)$ dalle quali occorre trarre la determinazione di queste funzioni incognite.

Eseguiremo tale determinazione in n-esima approssimazione sostituendo allo sviluppo (6, 2), quest'altro sviluppo:

$$(9,2) \qquad u(\rho,\theta) = \frac{1}{2} u_0(\rho) + \sum_{k=1}^{n} [u_k(\rho)\cos k\theta + v_k(\rho)\,\mathrm{sen}\, k\theta].$$

Ponendolo nella (4, 2) si ottiene:

$$(10,2) \quad \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta + \frac{1}{q^2}\sin^2\theta\right)u_0''(\rho) + \frac{1}{2}\left(\sin^2\theta + \frac{1}{q^2}\cos^2\theta\right)\frac{1}{\rho}u_0'(\rho) + \frac{1}{2}\lambda^2 u_0(\rho) +$$
$$\sum_{k=1}^{n}\Big\{\left(\cos^2\theta + \frac{1}{q^2}\sin^2\theta\right)\cos k\theta\, u_k''(\rho) + \left[\left(\sin^2\theta + \frac{1}{q^2}\cos^2\theta\right)\cos k\theta -\right.$$
$$\left. k\left(\frac{1}{q^2} - 1\right)\sin 2\theta \sin k\theta\right]\frac{1}{\rho}u_k'(\rho) + \left[-k^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{q^2}\cos^2\theta\right)\cos k\theta +\right.$$
$$\left.\lambda^2\rho^2\cos k\theta + k\left(\frac{1}{q^2} - 1\right)\sin 2\theta\sin k\theta\right]\frac{1}{\rho^2}u_k(\rho) +$$
$$\left(\cos^2\theta + \frac{1}{q^2}\sin^2\theta\right)\sin k\theta\, v_k''(\rho) + \left[k\left(\frac{1}{q^2} - 1\right)\sin 2\theta\cos k\theta +\right.$$
$$\left.\left(\sin^2\theta + \frac{1}{q^2}\cos^2\theta\right)\sin k\theta\right]\frac{1}{\rho}v_k'(\rho) + \left[-k^2\left(\sin^2\theta + \frac{1}{q^2}\cos^2\theta\right)\sin k\theta +\right.$$
$$\left.\lambda^2\rho^2\sin k\theta - k\left(\frac{1}{q^2} - 1\right)\sin 2\theta\cos k\theta\right]\frac{1}{\rho^2}v_k(\rho)\Big\} = 0.$$

Si prendano ora i momenti di questa equazione rispetto alle $2n+1$ funzioni $1, \cos s\theta, \sin s\theta, (s = 1, 2, \ldots, n)$, ottenendo così un certo sistema di $2n+1$ equazioni. E precisamente, integrando fra $(0, 2\pi)$ si ottiene:

$$(11,2) \quad \frac{1+q^2}{2q^2}u_0''(\rho) + \frac{1+q^2}{2q^2}\frac{1}{\rho}u_0'(\rho) + \lambda^2 u_0(\rho) - \frac{1-q^2}{2q^2}u_2''(\rho) - \frac{3(1-q^2)}{2q^2}\frac{1}{\rho}u_2'(\rho) = 0;$$

moltiplicando per $\cos\theta$ e integrando fra $(0, 2\pi)$:

$$(12,2) \quad \begin{aligned} &\frac{1+3q^2}{4q^2}u_1''(\rho) + \frac{1+3q^2}{4q^2}\frac{1}{\rho}u_1'(\rho) - \left(\frac{1+3q^2}{4q^2} - \lambda^2\rho^2\right)\frac{1}{\rho^2}u_1(\rho) - \\ &\frac{1-q^2}{4q^2}u_3''(\rho) - \frac{5(1-q^2)}{4q^2}\frac{1}{\rho}u_3'(\rho) - \frac{3(1-q^2)}{4q^2}\frac{1}{\rho^2}u_3(\rho) = 0\,; \end{aligned}$$

moltiplicando per $\sin\theta$ e integrando fra $(0, 2\pi)$:

$$
(13,2)\quad
\begin{aligned}
&\frac{3+q^2}{4q^2}\, v_1''(\rho) + \frac{3+q^2}{4q^2}\,\frac{1}{\rho}\, v_1'(\rho) - \left(\frac{3+q^2}{4q^2} - \lambda^2\rho^2\right)\frac{1}{\rho^2}\, v_1(\rho) - \\
&\frac{1-q^2}{4q^2}\, v_3''(\rho) - \frac{5(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho}\, v_3'(\rho) - \frac{3(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho^2}\, v_3(\rho) = 0\ ;
\end{aligned}
$$

moltiplicando per cos $s\,\theta$ e integrando fra $(0\,,2\pi)$:

$$
(14,2)\quad
\begin{aligned}
&-\frac{1-q^2}{4q^2}\, u''_{s-2}(\rho) + \frac{(2s-3)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho}\, u'_{s-2}(\rho) - \frac{s(s-2)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho^2}\, u_{s-2}(\rho) - \\
&\frac{1+q^2}{2q^2}\, u_s''(\rho) + \frac{1+q^2}{2q^2}\,\frac{1}{\rho}\, u_s'(\rho) - \left[\frac{s^2(1+q^2)}{2q^2} - \lambda^2\rho^2\right]\frac{1}{\rho^2}\, u_s(\rho) - \\
&\frac{1-q^2}{4q^2}\, u''_{s+2}(\rho) - \frac{(2s+3)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho}\, u'_{s+2}(\rho) - \frac{s(s+2)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho^2}\, u_{s+2}(\rho) = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$s = 2\,.\,3\,\ldots\ldots\, n\ ;$$

moltiplicando per sin $s\,\theta$ e integrando fra $(0\,,2\pi)$:

$$
(15,2)\quad
\begin{aligned}
&-\frac{1-q^2}{4q^2}\, v''_{s-2}(\rho) + \frac{(2s-3)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho}\, v'_{s-2}(\rho) - \frac{s(s-2)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho^2}\, v_{s-2}(\rho) + \\
&\frac{1+q^2}{2q^2}\, v_s''(\rho) + \frac{1+q^2}{2q^2}\,\frac{1}{\rho}\, v'_s(\rho) - \left[\frac{s^2(1+q^2)}{2q^2} - \lambda^2\rho^2\right]\frac{1}{\rho^2}\, v_s(\rho) - \\
&\frac{1-q^2}{4q^2}\, v''_{s+2}(\rho) - \frac{(2s+3)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho}\, v'_{s+2}(\rho) - \frac{s(s+2)(1-q^2)}{4q^2}\,\frac{1}{\rho^2}\, v_{s+2}(\rho) = 0.
\end{aligned}
$$

$$s = 2\,.\,3\,\ldots\ldots\, n\ .$$

3. Ricordiamo che nel caso del cerchio gli autovalori sono dati da μ_{ik} k-esimo zero della funzione di Bessel $J_i(\mu)$ [3]; nel caso dell'ellisse indicheremo con λ_{ik} quell'autovalore che per $q \to 1$ si riduce a μ_{ik}.

In una prima approssimazione poniamo $u = \frac{1}{2}\, u_0$: allora il sistema (11,2), ..., (15,2) si riduce a:

$$
(1,3)\qquad u_0''(\rho) + \frac{1}{\rho}\, u'_0(\rho) + \frac{2\,q^2}{1+q^2}\,\lambda^2\, u_0(\rho) = 0
$$

che, ponendo $\frac{2\,q^2}{1+q^2}\,\lambda^2 = \mu^2$, diventa:

$$
(2,3)\qquad u_0''(\rho) + \frac{1}{\rho}\, u_0'(\rho) + \mu^2\, u_0(\rho) = 0\ .
$$

[3]) Vedi op. cit. in [2]).

[4]) G. Krall, *op. cit.* in [2]), pag. 257.

Da questa equazione, discende notoriamente che gli autovalori di μ sono gli zeri μ_{0k} della funzione di Bessel $J_0(\mu)$.

Per $q = 1$ si ha $\lambda = \mu$, cogli autovalori $\lambda_{0k} = \mu_{0k}$, per $q < 1$ possiamo dire che una prima approssimazione dei λ_{0k} è fornita dalla $\frac{2q^2}{1+q^2}\lambda^2_{0k} = \mu^2_{0k}$ che porge

$$(3,3) \qquad \lambda_{0k} = \mu_{0k}\sqrt{\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{2}}\,.$$

Servendosi di una tabella per i valori di μ_{0k}, abbiamo così ottenuto:

Tabella II

q	λ_{01}	λ_{02}	q	λ_{01}	λ_{02}
1	2,404	5,520	0,5	3,793	8,710
0,9	2,541	5,834	0,4	4,574	10,504
0,8	2,718	6,243	0,3	5,913	13,579
0,7	2,964	6,806	0,2	8,666	19,899
0,6	3,303	7,584	0,1	17,082	39,225

4. Ponendo ora $u = \frac{1}{2}u_0 + u_1\cos\theta + v_1\sin\theta$, avremo il sistema:

$$(1,4) \qquad u_0''(\rho) + \frac{1}{\rho}u_0'(\rho) + \mu_0^2 u_0(\rho) = 0\,,$$

$$(2,4) \qquad u_1''(\rho) + \frac{1}{\rho}u_1'(\rho) + \left(\mu_1^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)u_1(\rho) = 0\,,$$

$$(3,4) \qquad v_1''(\rho) + \frac{1}{\rho}v_1'(\rho) + \left(\mu_1'^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)v_1(\rho) = 0\,,$$

avendo posto

$$(4,4) \qquad \begin{cases} \mu_0^2 = \dfrac{2q^2\lambda^2}{1+q^2} \\ \mu_1^2 = \dfrac{4q^2\lambda^2}{3q^2+1} \\ \mu_1'^2 = \dfrac{4q^2\lambda^2}{q^2+3} \end{cases}$$

La (1, 4) coincide colla (2, 3) e non dà nulla di nuovo. Considerando le altre due, osserviamo che nel caso del cerchio si ha $\mu_1 = \mu_1'$, quindi le equazioni (2, 4) e (3, 4) ammettono gli stessi autovalori in $\mu_1 . \mu_1'$, (zeri della J_1) ai quali corrispondono due diverse approssimazioni dei λ_{1k} che indicheremo con $\lambda_{1k}, \lambda'_{1k}$ e che si deducono dalle (4, 4).

TABELLA III

q	λ_{11}	λ_{12}	λ'_{11}	λ'_{12}
1	3,832	7,016	3,832	7,016
0,9	3,939	7,202	4,153	7.605
0,8	4,092	7,493	4,567	8,363
0,7	4,299	7.871	5,111	9,359
0,6	4,602	8,426	5,851	10,713
0,5	5.065	9,275	6,905	12.642
0,4	5,824	10,664	8,514	15.589
0,3	7.196	13,176	11,223	20,549
0,2	10,135	18.557	16,699	30,575
0,1	19,443	35.599	33,238	60,856

5. Poniamo ora

$$u = \frac{1}{2} u_0 + u_1 \cos\theta + v_1 \sin\theta + u_2 \cos 2\theta + v_2 \sin 2\theta .$$

Il sistema (11, 2), ... , (15, 2) si riduce in tal caso a

$$(1,5) \quad u_0''(\rho) + \frac{1}{\rho} u_0'(\rho) + \frac{2 q^2 \lambda^2}{1+q^2} u_0(\rho) - \frac{1-q^2}{1+q^2} u_2''(\rho) - 3 \frac{1-q^2}{1+q^2} \frac{1}{\rho} u_2(\rho) = 0 ,$$

$$(2,5) \quad u_1''(\rho) + \frac{1}{\rho} u_1'(\rho) + \left(\frac{4 q^2 \lambda^2}{1+3q^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) u_1(\rho) = 0,$$

$$(3,5) \quad v_1''(\rho) + \frac{1}{\rho} v_1'(\rho) + \left(\frac{4 q^2 \lambda^2}{3+q^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) v_1(\rho) = 0 ,$$

$$(4,5) \quad -\frac{1-q^2}{2(1+q^2)} u_0''(\rho) + \frac{1-q^2}{2(1+q^2)} \frac{1}{\rho} u_0'(\rho) + u_2''(\rho) + \frac{1}{\rho} u_2'(\rho) + \left(\frac{2q^2\lambda^2}{1+q^2} - \frac{4}{\rho^2}\right) u_2(\rho) = 0 ,$$

$$(5,5) \quad v_2''(\rho) + \frac{1}{\rho} v_2'(\rho) + \left(\frac{2 q^2 \lambda^2}{1+q^2} - \frac{4}{\rho^2}\right) v_2(\rho) = 0 .$$

Questo caso presenta un interesse particolare per le equazioni (1, 5) e (4, 5) formanti sistema.

Le equazioni (2, 5) e (3, 5) sono quelle già trattate e la (5, 5) che può scriversi al solito

$$v_2''(\rho) + \frac{1}{\rho} v_2'(\rho) + \left(\mu_2^2 - \frac{4}{\rho^2}\right) v_2(\rho) = 0$$

con

$$\mu_2^2 = \frac{2q^2\lambda^2}{1+q^2} \,,$$

è dello stesso tipo delle precedenti. Per $q = 1$ essa ammette gli autovalori μ_{2k} che sono gli zeri della funzione di Bessel $J_2(\mu)$, dai quali si ricava quindi un'approssimazione dei nuovi autovalori λ_{2k}.

Prendiamo ora in considerazione il sistema

$$(6,5)\quad \begin{cases} u_0''(\rho) + \dfrac{1}{\rho} u_0'(\rho) + \dfrac{2q^2\lambda^2}{1+q^2} u_0(\rho) = \dfrac{1-q^2}{1+q^2} u_2''(\rho) + 3\,\dfrac{1-q^2}{1+q^2}\,\dfrac{1}{\rho}\, u_2'(\rho) \\[2ex] \dfrac{1-q^2}{2(1+q^2)} u_0''(\rho) - \dfrac{1-q^2}{2(1+q^2)}\,\dfrac{1}{\rho}\, u_0'(\rho) = u_2''(\rho) + \dfrac{1}{\rho} u_2'(\rho) + \left(\dfrac{2q^2\lambda^2}{1+q^2} - \dfrac{4}{\rho^2}\right) u_2(\rho) . \end{cases}$$

In base ad una osservazione fatta al n. 2, possiamo porre:

$$(7,5)\quad \begin{aligned} u_0 &= c_0 + c_2\rho^2 + c_4\rho^4 + \ldots\ldots , \\ u_2 &= b_2\rho^2 + b_4\rho^4 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

si ottengono per la determinazione dei coefficienti incogniti c_i, b_k, le seguenti relazioni ricorrenti:

$$(8,5)\quad \begin{aligned} &1^2 c_2 + \frac{q^2\lambda^2}{2(1+q^2)} c_0 = 1\cdot 2\,\frac{1-q^2}{1+q^2}\, b_2 \\ &2^2 c_4 + \frac{q^2\lambda^2}{2(1+q^2)} c_2 = 2\cdot 3\,\frac{1-q^2}{1+q^2}\, b_4 \\ &3^2 c_6 + \frac{q^2\lambda^2}{2(1+q^2)} c_4 = 3\cdot 4\,\frac{1-q^2}{1+q^2}\, b_6 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(n+1)^2 c_{2n+2} + \frac{q^2\lambda^2}{2(1+q^2)} c_{2n} = (n+1)(n+2)\,\frac{1-q^2}{1+q^2}\, b_{2n+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &1\cdot 3\, b_4 + \frac{q^2\lambda^2}{2(1+q^2)} b_2 = 1\cdot 2\,\frac{1-q^2}{2(1+q^2)}\, c_4 \\ &2\cdot 4\, b_6 + \frac{q^2\lambda^2}{2(1+q^2)} b_4 = 2\cdot 3\,\frac{1-q^2}{2(1+q^2)}\, c_6 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &n(n+2)\, b_{2n+2} + \frac{q^2\lambda^2}{2(1+q^2)} b_{2n} = n(n+1)\,\frac{1-q^2}{2(1+q^2)}\, c_{2n+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dette u_{01}, u_{21}, le soluzioni corrispondenti a $c_0 = 1, b_2 = 0$ e u_{02}, u_{22} quelle che corrispondono a $c_0 = 0$, $b_2 = 1$, la soluzione generale risulta essere:

$$\begin{cases} u_0(\rho, \lambda) = c_0 u_{01}(\rho, \lambda) + b_2 u_{02}(\rho, \lambda) \\ u_2(\rho, \lambda) = c_0 u_{21}(\rho, \lambda) + b_2 u_{22}(\rho, \lambda). \end{cases}$$

A queste funzioni dobbiamo imporre le condizioni al contorno:

$$u_0(1, \lambda) = u_2(1, \lambda) = 0$$

e perciò:

$$\begin{cases} c_0 u_{01}(1, \lambda) + b_2 u_{02}(1, \lambda) = 0 \\ c_0 u_2 \ (1, \lambda) + b_2 u_{22}(1, \lambda) = 0 \,. \end{cases}$$

Dovendo le $u_0(\rho, \lambda)$, $u_2(\rho, \lambda)$ non essere identicamente nulle, si deduce la seguente equazione in λ:

$$\begin{vmatrix} u_{01}(1, \lambda) & u_{02}(1, \lambda) \\ u_{21}(1, \lambda) & u_{22}(1, \lambda) \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{9,5}$$

Quest'equazione trascendente si può risolvere con successive approssimazioni, sostituendovi successive equazioni algebriche da esse ottenute, considerando solo i primi termini degli sviluppi (7,5) delle $u_{01}, u_{02}, u_{21}, u_{22}$.

Fermando tali sviluppi ai termini di quarto grado e calcolando i coefficienti c_2, c_4, b_4 mediante le (8,5) l'equazione che approssima la (9,5) risulta essere:

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{q^2 \lambda^2}{2(1+q_2)} + \dfrac{q^4 \lambda^4}{8(1+6q^2+q^4)} & \dfrac{2(1-q^2)}{1+q^2} - \dfrac{q^2(1-q^2)\lambda^2}{1+6q^2+q^4} \\ \dfrac{q^4(1-q^2)\lambda^4}{24(1+q^2)(1+6q^2+q^4)} & 1 - \dfrac{p^2(3+2q^2+3q^4)\lambda^2}{6(1+q^2)(1+6q^2+q^4)} \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{10,5}$$

Osserviamo subito che nel caso del cerchio, cioè per $q = 1$, questa equazione si riduce alla:

$$\left(1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64}\right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{12}\right) = 0 \,. \tag{11,5}$$

Entro la prima parentesi compaiono i primi tre termini dello sviluppo di $J_0(\lambda)$ e questo fattore fornisce la radice doppia $\lambda = \sqrt{8} \sim 2,83$; entro la seconda parentesi compaiono invece i primi due termini dello sviluppo

di $\frac{8}{\lambda^2} J_2(\lambda)$ e si trova in corrispondenza la radice $\lambda = \sqrt{12} \sim 3,46$.

Per q generico, la (10,5) si scrive invece:

$$(12,5) \qquad \lambda^6 - 14\,\frac{1+q^2}{q^2}\,\lambda^4 + 16\,\frac{3+10q^2+3q^4}{q^4}\,\lambda^2 - \frac{48(1+q^2)(1+6q^2+q^4)}{q^6} = 0.$$

Per q prossimo a 1, questa equazione ha una sola radice reale e positiva prossima a 3,46. Per i vari valori di q si è sempre determinata quella radice reale e positiva della (12,5) che si deduce per continuità da quella ora accennata, e si sono trovati i seguenti valori:

TABELLA IV

q	λ_{21}	q	λ_{21}
0,9	3,697	0,4	7,786
0,8	4,063	0,3	10,326
0,7	4,572	0,2	15,429
0,6	5,274	0,1	30,787
0,5	6,273		

che, in base ad una precedente osservazione, vanno riguardati come valori approssimati degli autovalori λ_{21}.

6. Riprendiamo ora gli sviluppi (7,5) e prendiamo da essi altri termini fino all'ottavo grado, ricavandone i coefficienti per mezzo delle (8,5); in tal caso l'equazione algebrica che approssima la (9,5) si scrive:

$$(1,6) \qquad \begin{vmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

avendo posto

$$A_{11}(\lambda) = 1 - \frac{q^2\lambda^2}{1+q^2} + \frac{q^4\lambda^4}{8(1+6q^2+q^4)} - \frac{q^6(3+2q^2+3q^4)\lambda^6}{144(1+q^2)(1+6q^2+q^4)^2} + \frac{q^8(5-2q^2+5q^4)\lambda^8}{2304(1+6q^2+q^4)^3},$$

$$A_{12}(\lambda) = \frac{2(1-q^2)}{1+q^2} - \frac{q^2(1-q^2)\lambda^2}{1+6q^2+q^4} + \frac{q^4(1-q^2)(7+10q^2+7q^4)\lambda^4}{36(1+q^2)(1+6q^2+q^4)^2} - \frac{q^6(1-q^2)(3+7q^2+3q^4)\lambda^6}{144(1+6q^2+q^4)^3},$$

$$A_{21}(\lambda) = \frac{q^4(1-q^2)\lambda^4}{24(1+q^2)(1+6q^2+q^4)} - \frac{q^6(1-q^2)\lambda^6}{96(1+6q^2+q^4)^2} + \frac{q^8(1-q^2)(7+10q^2+7q^4)\lambda^8}{5760(1+q^2)(1+6q^2+q^4)^3},$$

$$A_{22}(\lambda) = 1 - \frac{q^2(3+2q^2+3q^4)\lambda^2}{6(1+q^2)(1+6q^2+q^4)} + \frac{q^4(5-2q^2+5q^4)\lambda^4}{18(1+6q^2+q^4)^2} - \frac{q^6(17+12q^2+6q^4+12q^6+17q^8)\lambda^6}{1440(1+q^2)(1+6q^2+q^4)^3}.$$

Poniamo anche ora $q = 1$ ed otteniamo:

$$\left[1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} - \frac{\lambda^6}{2304} + \frac{\lambda^8}{147456}\right]\left[1 - \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\lambda^4}{384} - \frac{\lambda^6}{23040}\right] = 0 . \tag{2,6}$$

Il primo fattore è ancora formato dai primi termini dello sviluppo di $J_0(\lambda)$ ed il secondo dai termini dello sviluppo di $\frac{8}{\lambda^2} J_2(\lambda)$.

Esaminando le due equazioni che si ottengono dalle (2,5) si osserva che la prima ha solo due radici reali: $0 < \lambda^2 < 8$ e $16 < \lambda^2 < 24$, da cui $0 < \lambda < 2,83$ e $4 < \lambda < 5$. La seconda equazione ha una sola radice reale $\lambda^2 \cong 24$, $\lambda \cong 4,8$.

Risolvendo numericamente la (1,6) per i valori di q, fra le varie radici trovate si è solo considerata quella che, per q prossimo ad 1, cade fra 0 e 2,83 e se ne è seguita, per continuità, la variazione. Si sono così ottenuti i valori riportati nella Tabella I, che ovviamente vanno riguardati come valori approssimati di λ_{01}.

Di questi autovalori si ha così una seconda approssimazione (la prima è quella della Tabella II), e si hanno pertanto indicazioni, in pratica sufficienti, sulla frequenza più bassa della membrana ellittica.

Le riemanniane degli S_r ipercomplessi.

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 7 novembre 1942 - XXI)

Sunto. — Si dimostra che in corrispondenza ad una data algebra A di ordine n, dotata di modulo, definita in un qualunque corpo numerico Γ, restano determinati nell' S_N proiettivo legato al corpo Γ, (con $N = n(r+1) - 1$) due sistemi lineari di proiettività ad n parametri omogenei, formanti gruppo, e che le varietà invarianti minime di tali gruppi costituiscono due congruenze lineari di spazi ad $n-1$ dimensioni che ci forniscono una prima rappresentazione dei due spazi ipercomplessi di prima specie, sinistro e destro S'_r ed S''_r, legati all' algebra A.

Si dimostra inoltre che in S_N l' algebra A determina altri due sistemi lineari di proiettività ad n parametri omogenei, tali che gli S_{N-n} vertici delle stelle di iperpiani omologhi di un generico iperpiano rispetto alle proiettività di ciascuno dei due sistemi, forniscono una rappresentazione dei due spazi ipercomplessi di seconda specie legati all'algebra A. Vengono fissate delle relazioni esistenti fra i quattro sistemi di proiettività determinati in S_N dall' algebra A, due delle quali dànno l' interpretazione geometrica di due interessanti teoremi del Frobenius nella teoria generale delle algebre.

Si dimostra infine che in S_N restano determinati due sistemi lineari di ipersuperficie di ordine n composte medianti le sopradette due congruenze lineari, rappresentati due varietà di punti, *riemanniane* dei due spazi ipercomplessi di prima specie. Di dette riemanniane si forniscono le equazioni parametriche. Una terza rappresentazione dei due spazi ipercomplessi di prima specie si ottiene intersecando le due congruenze con un S_{nr} di S_N.

Quanto sopra estende, pertanto, ad uno spazio ipercomplesso le tre note rappresentazioni di un S_r proiettivo complesso, che nel caso della retta proiettiva complessa, dànno luogo alla rappresentazione nella congruenza lineare ellittica dell' S_3 reale, nella quadrica a punti ellittici e nel piano di Gauss.

§ 1. — Prima rappresentazione di uno spazio legato ad un' algebra.

1. *Spazio ambiente della prima rappresentazione.* — Sia A un'algebra di ordine n, dotata di modulo u, definita in un qualunque corpo numerico Γ. Siano $u_1, \ldots, u_n$ un gruppo di unità di A [1]). Possiamo supporre,

---

[1]) Scorza G., *Corpi numerici ed algebre.* Principato, Messina, 1921.

senza venir meno alla generalità, quando sarà conveniente per avere semplificazioni nelle dimostrazioni, che la prima unità u_1 sia il modulo u dell'algebra. È ciò che si suol fare per l'algebra dei numeri complessi quando un numero complesso si pone sotto la forma $a+bi$, nel qual caso il corpo numerico Γ è il corpo dei numeri reali (dove variano a e b) e le due unità sono $u_1=1$ e $u_2=i$.

In corrispondenza ad un fissato intero r, consideriamo una $(r+1)$—*pla* di elementi di A non tutti nulli $X(x_1, .., x_{r+1})$, definita a meno di un fattore non nullo in Γ. Le $(r+1)$—*ple* X costituiscono i *punti* di uno spazio S_N di dimensione

$$(1) \qquad N = n(r+1) - 1$$

legato al corpo numerico Γ. Se poniamo

$$(2) \qquad x_s = z_1^{(s)} u_1 + \ldots + z_n^{(s)} u_n \qquad (s = 1, \ldots, r+1),$$

le coordinate di X in S_N sono gli $N+1$ numeri di Γ

$$(3) \qquad (z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}, \ldots\ldots, z_1^{(r+1)} \ldots, z_n^{(r+1)}).$$

É in questo spazio S_N che faremo la prima rappresentazione di uno spazio S_r ipercomplesso proiettivo di prima specie legato all'algebra A, mediante una congruenza lineare di spazi ad $n-1$ dimensioni. Nel caso $r=1$, ed A l'algebra dei numeri complessi, S_N è l' S_3 reale, e tale congruenza lineare è la congruenza lineare ellittica di rette di S_3.

2. *Matrici relative alla* $(r+1)$—*pla* X.

Moltiplicando *a sinistra* per un elemento x di A successivamente le n unità $u_1, .., u_n$, si ottengono elementi ciascuno dei quali è, a sua volta, una combinazione lineare delle unità con i coefficienti in Γ. La matrice quadrata di ordine n, formata con gli n^2 numeri che così si ottengono, si chiama la *matrice sinistra* di x, e si indica con μ'_x. Analogamente, moltiplicando a destra, si definisce la *matrice destra* di x, che si indica con $\mu''x$.

In corrispondenza alla $(r+1)-$*pla* $X(x_1 \ldots, x_{r+1})$ di elementi di A, la matrice

$$(4) \qquad O'_X = \| \mu'_{x_1} \qquad \mu'_{x_{r+1}} \|$$

composta *in orizzontale* con le matrici sinistre degli elementi di X, si dice [2]) la *prima matrice sinistra di* X. Analogamente si definisce la

[2]) Spampinato N., *Teoria delle caratteristiche in un' algebra dotata di modulo ed* S_r *ipercomplessi*. Memorie della Reale Accademia dei Lincei, serie VI, vol. IV, 1936 XIV.

prima matrice destra di X, che è composta in orizzontale con le matrici destre degli elementi, e si indica con O''_X.

Quando le matrici si compongono *in verticale*, anzichè in orizzontale, si ottengono due matrici che si indicano con V'_X e V''_X, e si chiamano la seconda matrice sinistra o destra di X.

Le caratteristiche delle matrici O'_X, O''_X si dicono la *prima caratteristica* sinistra o destra di X. Così le caratteristiche delle due matrici $V'_{X'}$, V''_X si dicono la *seconda caratteristica sinistra o destra di* X.

Una proprietà fondamentale per le quattro matrici relative ad X è questa: [3])

Se y *è un qualunque elemento di* A *e indichiamo con* yX *e* Xy *le due* $(r+1)$—ple $(yx_1, \ldots yx_{r+1})$ *e* $(x_1 y, \ldots, x_{r+1} y)$, *si ha*:

$$(5) \qquad \begin{cases} O'_{Xy} = \mu'_y \, O'_X \\ O''_{yX} = \mu''_y O''_X \\ V'_{yX} = V'_X \mu'_y \\ V''_{Xy} = V''_X \mu'' \end{cases}$$

Se y è non nullo, nè divisore dello zero, il determinante delle matrici μ'_y e μ''_y è non nullo e quindi, se le quattro matrici di X sono a caratteristica massima, saranno pure a caratteristica massima le matrici O'_{Xy}, O''_{yX}, V'_{yX}, V''_{Xy}, dovendo avere queste matrici, per le relazioni (5), la stessa caratteristica delle matrici O'_X, O''_X, V'_X e V''_X rispettivamente.

3. *Gli* S_r *proiettivi ipercomplessi legati ad* A.

In corrispondenza alle quattro caratteristiche di una $(r+1)$—*pla* X di A si definiscono i quattro *spazi numerici* ipercomplessi [4]) legati all'algebra A, assumendo come punti di un tale spazio le X di *caratteristica massima* (prima o seconda, sinistra o destra) e definite a meno di un fattore (a sinistra o a destra) non nullo nè divisore dello zero. Ciò in base all'osservazione fatta nel n. *2*, per le relazioni (5).

Un S_r ipercomplesso è un insieme di elementi che si possa mettere in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con uno dei quattro spazi numerici legati ad A. Abbiamo perciò quattro spazi ipercomplessi legati ad A. Precisamente abbiamo due tipi di spazi detti di *prima specie* rispondenti alle X con la prima caratteristica massima e due tipi di seconda specie rispondenti alle X con la seconda caratteristica massima. Per es.:

---

[3]) Loc. cit. [2]), n. 11, della Parte prima, § 1.

[4]) Loc. cit. [2]), Parte seconda, § 1.

È uno spazio ipercomplesso di prima specie sinistro un insieme di elementi che possa mettersi in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con le $(r+1)$—*ple* di elementi di A con la prima caratteristica sinistra massima e definite a meno di un fattore a destra in A non nullo nè divisore dello zero. Ciò in base alla relazione $O'_{Xy} = \mu'_y O'_X$. Analogamente:

È uno spazio ipercomplesso di prima specie destro un insieme di elementi che possa mettersi in corrispondenza biunivoca senza le eccezioni con le $(r+1)$*ple* di elementi di A con la prima caratteristica destra massima e definita a meno di un fattore a sinistra non nullo nè divisore dello zero. Ciò in base alla relazione $O''_{yX} = \mu''_y O''_X$.

L'intero r dicesi *dimensione dello spazio ipercomplesso rispetto all'algebra*. Il prodotto nr di tale dimensione per l'ordine dell'algebra dicesi la *dimensione dello spazio ipercomplesso rispetto al corpo numerico* Γ in cui l' algebra è definita.

Noi ci proponiamo di costruire uno spazio ipercomplesso con enti geometrici dello spazio S_N legato al corpo numerico, cioè daremo una *prima rappresentazione* di un S_r ipercomplesso, in analogia alla rappresentazione di un ordinario spazio S_r complesso con una congruenza lineare di rette di un S_N reale, con $N = 2(r+1)-1$.

4. *Rappresentazione di un* S_r *ipercomplesso in* S_N.

Indichiamo con S'_r, S''_r, i due spazi numerici di prima specie sinistro e destro legati ad A. *Rappresentando in* S_N *questi due spazi ipercomplessi avremo di conseguenza una rappresentazione dei due spazi di seconda specie*, perchè, come abbiamo già dimostrato, *gl' iperpiani* di S'_r e di S''_r costituiscono due spazi ipercomplessi di seconda specie rispettivamente destro e sinistro,

Sia $X(x_1, \ldots, x_{r+1})$ un elemento di S'_r e quindi con la matrice O'_X di caratteristica massima, cioè n. In corrispondenza alle n righe di O'_X, ciascuna formata con $N+1$ numeri di Γ, consideriamo in S_N gli n punti $X'_1, \ldots, X'_n$, aventi per coordiane tali n righe. Se moltiplichiamo *a destra* gli elementi di X per un elemento y di A non nullo, nè divisore dello zero, tenendo conto che si ha:

$$O'_{Xy} = \mu'_y O'_X,$$

risulta che ogni riga della matrice O'_{Xy} è una combinazione lineare delle righe della matrice O'_X, e quindi gli n punti di S_N aventi per coordinate le n righe di O'_{Xy} variano, al variare del fattore y, nello spazio S'_{n-1} congiungente gli n punti indipendenti $X'_1 \ldots, X'_n$. L'indipendenza di questi punti discende dall'ipotesi che O'_X è di caratteristica massima. Noi assumeremo come immagine del *punto* X $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ dello spazio ipercomplesso S'_r, lo spazio S'_{n-1} di S_N, dato che alla $(r+1)-$*pla* $Xy = (x_1 y \ldots x_{r+1} y)$

corrisponde, qualunque sia il fattore y, non nullo nè divisore dello zero, una *n-pla* di punti indipendenti di S'_{n-1} e quindi determinanti lo stesso S'_{n-1}.

Sia, analogamente, $X(x_1, \ldots, x_{r+1})$ un punto dello spazio ipercomplesso di prima specie destro, o ciò che è lo stesso del primo spazio numerico destro S''_r, e quindi con la matrice O''_X di caratteristica massima. Indichiamo con $X''_1, \ldots, X''_n$ i punti di S_N aventi per coordinate le n righe di O''_X. Questi punti determinano un S''_{n-1} che si assumerà come immagine del punto X di S''_r, tenendo conto che moltiplicando *a sinistra* gli elementi di X per un fattore non nullo nè divisore dello zero, in corrispondenza alla matrice $O''_{yX} = \mu''_y O''_X$ avremo n punti indipendenti che determinano lo stesso S''_{n-1}.

Ora si domanda: facendo variare $X(x_1, \ldots, x_{r+1})$ in ciascuno dei due spazi ipercomplessi S'_r e S''_r che cosa descrivono in S_N i due spazi immagini S'_{n-1} e S''_{n-1}? Dimostreremo che ciascuno di questi spazi descrive una congruenza lineare, costituita dagli spazi invarianti minimi di un gruppo di proiettività determinato in S_N dall'algebra A.

A tal fine occorre scrivere esplicitamente le matrici μ'_x e μ''_x sinistra e destra dell'elemento $x = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$ di A.

Posto

$$u_i u_j = \lambda_{ij1} u_1 + \ldots + \lambda_{ijn} u_n, \tag{6}$$

cioè indicati con λ_{ijk} le *costanti di moltiplicazione* [5]) dell'algebra A, e posto

$$\mu'_x = \| z'_{ij} \| \qquad x \qquad \mu''_x = \| z''_{ij} \| \tag{7}$$

si ha

$$z'_{ij} = \sum_{l}^{1 \cdots n} \lambda_{lij} z_l \qquad , \qquad z''_{ij} = \sum_{l}^{1 \cdots n} \lambda_{ilj} z_l \ . \tag{8}$$

Ne segue che gli elementi $z'_{s1}, \ldots, z'_{sn}$ della riga *s-ma* di μ'_x sono dati da

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_{s1} = \lambda_{1s1} z_1 + \ldots + \lambda_{ns1} z_n \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ z'_{sn} = \lambda_{1sn} z_1 + \ldots + \lambda_{nsn} z_n \end{array} \right. \tag{9}$$

---

[5]) Loc. cit. [1]), Parte seconda, n. 182.

cioè si ottengono applicando alle coordinate $z_1, \ldots, z_n$ di x la sostituzione lineare omogenea di matrice

$$(10) \qquad M_s = \begin{Vmatrix} \lambda_{1s1} \ldots \lambda_{ns1} \\ \ldots, \ldots \ldots \\ \lambda_{1sn} \ldots \lambda_{nsn} \end{Vmatrix}$$

Consideriamo ora la matrice sinistra $O'_X = \| \mu'_{x_1} \quad \mu'_{x_{r+1}} \|$ di una $(r+1)$—*pla* di elementi $x_1, \ldots, x_{r+1}$ di A. La s—*ma* riga di tale matrice, per quanto è stato osservato, avrà per primi n elementi ottenuti dalle coordinate di x_1 con la sostituzione di matrice M_s, per secondi n elementi i numeri ottenuti dalle coordinate di x_2 con la stessa sostituziono di matrice M_s, e così via di seguito, sicchè, in definitiva, si può affermare che gli elementi della s—*ma* riga di O'_X si ottengono applicando alle coordinate

$$(3) \qquad (z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}, \ldots\ldots, z_1^{(r+1)}, \ldots, z_n^{(r+1)})$$

di X la sostituzione di matrice

$$(11) \qquad (M_s) = \begin{Vmatrix} \lambda_{1s1} \ldots \lambda_{ns1} & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1sn} \ldots \lambda_{nsn} & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \lambda_{1s1} \ldots \lambda_{ns1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \lambda_{ns1} \ldots \lambda_{nsn} \end{Vmatrix}$$

composta con $(r+1)^2$ matrici quadrate di ordine n, di cui quelle nella diagonale princip e sono tutte uguali alla matrice M_s e le rimanenti sono tutte eguali al. i matrice nulla. Possiamo allora affermare che:

Il punto] *dello spazio* S_N *avente per coordinate la* s—ma *riga della matrice* O'_X *è l'omologo del punto* X *di coordinate* (3) *nella proiettività di* S_N *avente per matrice la matrice* (M_s).

Sicchè gli n punti $X'_1, \ldots, X'_n$ che determinano lo spazio S'_{n-1} di S_N, immagine del punto $X(x_1, \ldots x_n)$ dello spazio ipercomplesso S'_r, sono gli omologhi del punto X di S_N nelle proiettività di matrici

$$(12) \qquad (M_1), (M_2), \ldots, (M_n) .$$

Ne segue che i punti di S_{n-1} sono gli omologhi dello stesso punto X ri-

spetto a tutte le proiettività del sistema lineare di proiettività aventi per matrici le matrici combinazioni lineari delle matrici (12) nel corpo Γ. Noi dimostreremo che questo sistema lineare di proiettività è anche un gruppo, e precisamente dimostreremo che le matrici di tali proiettività formano un' algebra dotata di modulo che risulta reciproca dell'algebra A. Al modulo dell'algebra corrisponde la proiettività identica che farà parte del gruppo. Ne seguirà che S'_{n-1} è la varietà invariante minima del gruppo determinata dal punto X, e che gli spazi S'_{n-1} immagini dello S'_r ipercomplesso costituiscono, pertanto, una congruenza lineare.

A tal fine osserviamo che si ha, eseguendo i prodotti $u_1 u_s, \ldots, u_n u_s$,

$$(13) \qquad \begin{cases} u_1 u_s = \lambda_{1s1} u_1 + \ldots + \lambda_{1sn} u_n \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ u_n u_s = \lambda_{ns1} u_1 + \ldots + \lambda_{nsn} u_n \end{cases}$$

e quindi la matrice destra μ''_{u_s}, dèll' unità u_s di A è data da

$$(14) \qquad \mu'_{u_s} = \begin{Vmatrix} \lambda_{1s1} & \ldots & \lambda_{1sn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{ns1} & \ldots & \lambda_{nsn} \end{Vmatrix}$$

Confrontando la (14) con la (10) si scorge che la matrice M_s non è altro che la trasposta della matrice destra μ''_{u_s} dell' unità u_s. Ne segue che le matrici

$$(15) \qquad M = \rho_1 M_1 + \ldots + \rho_n M_n,$$

combinazioni lineari con numeri di Γ delle matrici $M_1 \ldots, M_n$, non sono altro che le trasposte delle matrici destre degli elementi di A e precisamente la matrice M è la trasposta della matrice destra dell' elemento $\rho_1 u_1 + \ldots + \rho_n u_n$. Ora è noto che le matrici trasposte dalle matrici destre degli elementi di un' algebra costituiscono un' algebra reciproca dell'algebra data, [6]) quindi le matrici M costituiscono (un sistema lineare) e un gruppo. Ne segue che anche le matrici

$$(16) \qquad (M) = \rho_1 (M_1) + \ldots + \rho_n (M_n)$$

combinazioni lineari delle matrici $(M_1), \ldots, (M_n)$ formano un' algebra eqnivalente alla reciproca dell' algebra A. Resta pertanto dimostrato che

---

[6]) Loc. cit. [1]), Parte seconda, n. 193, h).

le proiettività di matrici (16), combinazioni lineari delle matrici (12) costituiscono un gruppo, e che, di conseguenza, gli S'_{n-1} di S_N riempiti dai punti omologhi di un generico punto X variabile in S_N, immagini dell'S'_r ipercomplesso, generano una congruenza lineare, cioè per un generico punto X dello spazio S_N passa uno e uno solo di tali S'_{n-1}. Indicheremo con (S'_{n-1}) tale congruenza rappresentante in S_N lo spazio ipercomplesso di prima specie sinistro S'_r legato all'algebra. Il gruppo di proiettività di S_N di matrici (M) che genera la congruenza (S_{n-1}) si indicherà con R_{n-1}, per ricordare che è ad n parametri omogenei $\rho_1, \dots, \rho_n$, numeri del corpo Γ, e si dirà il *gruppo reciproco* determinato da A in S_N, per ricordare che le matrici della proiettività di tale gruppo costituiscono un'algebra reciproca dell'algebra A.

Quanto si è detto per lo spazio sinistro S'_r, si può ripetere per l'altro spazio di prima specie, destro S''_r, partendo dalla prima matrice destra O''_X di una $(r+1)$ — *pla* di elementi di A a caratteristica massima e definita a meno di un fattore nell'algebra non nullo nè divisore dello zero. In corrispondenza avremo in S_N uno spazio S''_{n-1} congiungente i punti aventi per coordinate le n righe di O''_X, che si dirà l'immagine del *punto* X di S''_r. Al variare di X in S''_r l'immagine S''_{n-1} descrive una congruenza lineare (S''_{n-1}) generata da un gruppo di proiettività, formanti sistema lineare, ad n parametri omogenei, e le cui matrici sono del tipo (M) con la differenza, in questo caso, che le matrici M sono le trasposte delle matrici *sinistre* degli elementi di A, e quindi costituenti, per un teorema noto, [7]) un'algebra *equivalente* alla data A. Tale gruppo di proiettività si indicherà con E_{n-1} e si dirà il *gruppo equivalente* determinato dall'algebra A in S_N.

Raccogliendo si ha il seguente:

1° Teorema fondamentale. — *Ogni algebra* A *dotata di modulo, di ordine* n, *definita in un qualunque corpo numerico* Γ, *determina nello spazio proiettivo* S_N *di dimensione* $N = n(r+1) - 1$, *legato al corpo* Γ, *due sistemi lineari di proiettività ad* n *parametri omogenei, formanti gruppo: il gruppo reciproco* R_{n-1} *e il gruppo equivalente* E_{n-1}. *Le matrici dei coefficienti delle proiettività di* R_{n-1} *o di* E_{n-1} *sono le matrici quadrate di ordine* $N+1 = n(r+1)$ *composte con* $(r+1)^2$ *matrici quadrate di ordine* n *del tipo*

$$(M) = \begin{Vmatrix} M & O & \dots & O \\ O & M & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & M \end{Vmatrix}$$

---

[7]) Loc. cit. [6]).

essendo M *la trasposta della matrice destra o sinira dell'elemento corrente in* A, *e* O *la matrice quadrata nulla di ordine* n.

Le varietà invarianti minime dei gruppi R_{n-1} *ed* E_{n-1} *generale dai punti generici costituiscono due congruenze lineari* (S'_{n-1}) *ed* (S''_{n-1}). *di spazi ad* n—1 *dimensioni, che ci forniscono una rappresentazione in* S_N *dei due spazi proiettivi ipercomplessi. di prima specie, sinistro* S'_r *e destro* S''_r, *rispettivamente, legati all'algebra* A.

L' S_{n-1} *della congruenza* (S'_{n-1}) *o* (S''_{n-1}) *immagine di un punto* $X(x_1, \dots x_{r+1})$ *di* S'_r *o* S''_r *si ottiene congiungendo gli* n *punti di* S_N *le cui coordinate sono le* n *righe della matrice* O'_X *o* O''_X *composta in orizzontale con le matrici sinistre o destre degli elementi* $x_1, \dots, x_{r+1}$ *di* A.

5. *Punti singolari delle due congruenze.*

Si domanda: quali sono i punti di S_N per i quali non passa un determinato piano della congruenza (S'_{n-1})? Sono evidentemente i punti X per i quali la corrispondente prima matrice sinistra O'_X risulta di caratteristica $<n$. Si osservi che in tal caso gli elementi $x_1, \dots, x_n$ di A che costituiscono la $(r+1)$ — *pla* X devono essere tutti divisori dello zero, perche se un tale elemento fosse non divisore dello zero la corrispondente matrice sinistra sarebbe a determinante non nullo e quindi la caratteristica di O'_X sarebbe n. Si osservi che di questa proprietà non vale l'inversa, cioè gli elementi $x_1, \dots x_n$ possono essere tutti divisori dello zero e risultare n la caratteristica della matrice O'_X.

Analoghe osservazioni si fanno per la matrice O''_X e la seconda congruenza (S''_{n-1}). Si ha pertanto:

I punti singolari delle due congruenze (S'_{n-1}) *e* (S''_{n-1}) *sono i punti* X *le cui corrispondenti matrici* O'_X *e* O''_X *sono di caratteristica* $<$n, *rispettivamente.*

Se l'algebra A *è primitiva, cioè non ammette divisori dello zero, le due congruenze* (S'_{n-1}) *e* (S''_{n-1}) *non ammettono punti singolari.*

Si osservi esplicitamente che quando l'algebra è commutativa, i due gruppi di proiettività R_{n-1} ed E_{n-1} coincidono e quindi coincidono le due congruenze.

6. *Caso dell'* S_r *proiettivo complesso.*

In questo caso lo spazio ambiente della congruenza (le due congruenze, coincidono perchè l'algebra dei numeri complessi è commutativa e lo spazio S_N e l'S_N reale. La matrice sinistra (o destra) di un numero complesso $a+bi$, essendo $i(a+bi) = -b+ai$ è la matrice

$$(17) \qquad \left\| \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} \right\|$$

e quindi il gruppo R_s (coincidente con E_1) è costituito dalle proiettività dello spazio reale S_N di matrici

$$(18) \qquad (M) = \left\| \begin{matrix} a & -b & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \dots\dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & b & a \end{matrix} \right\|$$

In corrispondenza del punto

$$(19) \qquad X(x'_1 + ix''_1, \dots\dots, x'_{r+1} + ix''_{r+1})$$

dell' S_r complesso, si ha la matrice

$$(20) \qquad O' = \left\| \begin{matrix} x'_1 & x''_1 & \dots\dots\dots & x'_{r+1} & x''_{r+1} \\ -x''_1 & x'_1 & \dots\dots\dots & -x''_{r+1} & x'_{r+1} \end{matrix} \right\|$$

Le rette della congruenza (S'_1) sono pertanto le rette congiungenti i punti X' e X'' aventi per coordinate le due righe della matrice O'_X. [Il punto X' coincide col punto X di S_N immagine del punto (19) dell' S_r complesso, perchè delle due unità 1 e i la prima coincide col modulo dell'algebra]. Si osservi esplicitamente che i punti X' e X'' sono sempre indipendenti, cioè la matrice O'_X (per le x e x'' reali non tutti nulli, conseguenza dell'ipotesi che il punto (19) è dell' S_r complesso) è di caratteristica 2. Infatti per essere la caratteristica di $O'_X < 2$ dovrebbero essere nulli, in particolare, tutti i minori

$$(21) \qquad \left| \begin{matrix} x'_j & x''_j \\ -x''_j & x'_j \end{matrix} \right| = x'^2_j + x''^2_j$$

e quindi dovrebbero essere nulli tutti i numeri reali x'_j e x''_j.

La congruenza (S'_1) non ammette, pertanto, punti singolari, appunto perchè l'algebra dei numeri complessi non ammette divisori dello zero. Verifichiamo ora che ogni proiettività del gruppo R_1 trasforma ciascuna retta $X'X''$ della congruenza in sè stessa. Infatti un punto P di $X'X''$ ha le coordinate combinazione lineare, secondo due numeri reali ρ e σ, delle

due righe della matrice O'_x (coordinate di X' e X''), cioè del tipo

$$(22) \qquad P(\rho x'_1 - \sigma x'' \,,\ \rho x' + \sigma x_1 \,,\ \ldots\ldots \,,\ \rho x'_{r+1} - \sigma x''_{r+1} \,.\ \rho x''_{r+1} + \sigma x'_{r+1})$$

Il punto P' omologo del punto P per una proiettività di matrice (M), data dalla (18), ha le coordinate

$$(23) \qquad P'[(a\rho - b\sigma)x'_1 - (a\sigma - b\rho)x''_1 \ldots\ldots (a\rho - b\sigma)x_{r+1} - (a\sigma - b\rho)\, x''_{r+1}]$$

e quindi P' ha le coordinate combinazioni lineari delle coordinate di X' e X'', secondo i numeri $a\rho - b\rho$ e $a\sigma - b\rho$, pertanto P' appartiene ad $X'X''$.

Si osservi esplicitamente che le rette $X'X''$ della congruenza riempiono tutto lo spazio reale S_N (In questo caso è $N = 2(r+1) - 1$), cioè un S_{2r+1}.

La retta della congruenza passante per un dato punto X' e la congiungente X' col punto X'' che è l'omologo di X' in quella particolare proiettività del gruppo R_1 rispondente ai valori $a=0$ e $b=1$ dei due parametri reali a e b. Volendo caratterizzare la proiettività di R_1 introduciamo in S_{2r+1} i punti immaginari e cerchiamo i punti uniti di tali proiettività. Il determinante caratteristico della matrice (M) è uguale a

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix}^{r+1}$$

ed eguagliato a zero da un'equazione con due radici $(r+1)$*ple*: Queste radici sono fornite dall'equazione

$$(a-\lambda)^2 + b^2 = 0$$

che ammette le radici immaginarie coniugate $a+bi$ e $a-bi$. Ne segue che ogni proiettività di R_2 ammette i due spazi di punti uniti, ad r dimensioni, indipendenti, di equazioni (rispondenti alle radici $a+bi$ e $a-bi$):

$$(25) \qquad -ix_1 - x''_1 = 0 \,,\ \ldots\ldots \,,\ -ix'_{r+1} - x''_{r+1} = 0$$

$$(26) \qquad ix'_1 - x''_1 = 0 \ldots\ldots\ ix'_{r+1} - x''_{r+1} = 0.$$

Concludendo si ha, com'è noto:

Le rette della congruenza (S'_1) *dell'* S_{2r+1} *reale che rappresenta l'* S_r *complesso è costituita dalle rette reali congiungenti punti immaginari coniugati di due* S_r *immaginari coniugati. Il gruppo* R_1 *di proiettività che genera tale congruenza lineare è formato dalle proiettività che ammettono come spazi di punti uniti i sudetti due spazi immaginari coniugati.*

Si osservi che in ogni retta della congruenza (unita per ogni priettività del gruppo R_1) le proiettività subordinate dalle proiettività di R_1 costituiscono il gruppo G_1 delle proiettività reali aventi due punti uniti fissi nei due punti immaginari coniugati di appoggio della retta nei due S_r immaginari coniugati, spazi di punti uniti delle proiettività di R_1.

7. *Rappresentazione degl' iperpiani di un* S_r *ipercomplesso.*

L'insieme degl' iperpiani di un S_r ipercomplesso di prima specie, sinistro o destro, costituiscono un S_r di seconda specie sinistro o destro rispettivamente, per la stessa definizione di iperpiano in uno spazio ipercomplesso, definizione che più sotto richiameremo. Rappresentando, dunque, gl'iperpiani degli spazi di prima specie, veniamo a rappresentare, nello stesso tempo, gli spazi di seconda specie. A tal proposito è bene ricordare che quando l'algebra A è a determinante non identicamente nullo, gli spazi di prima specie coincidono con quelli di seconda specie, e precisamente lo spazio di prima specie sinistro coincide con lo spazio di seconda specie destro, e lo spazio di prima specie destro coincide con lo spazio di seconda specie sinistro. Sicchè in questo caso abbiamo una sola coppia di spazi ipercomplessi tali che gl' iperpiani di uno costituiscono uno spazio coincidente con l'altro. Questo è il caso che presenta una generica algebra A, dotata di modulo, perchè nel caso generico il determinante dell'algebra non è identicamente nullo.

Nello spazio ipercomplesso di prima specie sinistro S'_r consideriamo un iperpiano cioè l'insieme dei punti X soddisfacenti ad una equazione lineare,

$$\pi_1 x_1 + \dots + \pi_{r+1} x_{r+1} = 0 \tag{27}$$

con i coefficienti a sinistra, e le incognite a destra, e tale che la $(r+1)$—*pla* di elementi di A

$$(\pi_1, \dots\dots, \pi_{r+1}) \tag{28}$$

sia con la seconda caratteristica sinistra massima. Si osservi che moltiplicando a sinistra l'equazione (27) per un fattore non nullo nè divisore dello zero, l'equazione che si ottiene ammette tutte e sole le soluzioni della (27) e quindi rappreseuta lo stesso iperpiano, perciò la $(r+1)$—*pla* è determinata dall'iperpiano a meno di un fattore a sinistra non nullo nè divisore dello zero, cioè tale iperpiano costituisce un *punto* dello spazio ipercomplesso di seconda specie sinistro legato all'algebra A.

Posto

$$\pi_s = p_1^{(s)} u_1 + \dots\dots + p_n^{(s)} u_n \qquad (s = 1, \dots, r+1) \tag{29}$$

con le $p_j^{(s)}$ numeri del corpo Γ non tutti nulli, facciamo corrispondere alla $(r+1)$—*pla* (28) l'iperpiano π di S_N di coordinate

$$\pi(p_1^{(1)}, \ldots\ldots, p_n^{(1)}, \ldots\ldots, p_1^{(r+1)}, \ldots\ldots, p_n^{(r+1)}) \tag{30}$$

e alla $(r+1)$—*pla* $X(x_1, \ldots\ldots, x_{r+1})$ il punto X di coordinate

$$X(z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}, \ldots\ldots, z_1^{(r+1)}, \ldots, z_n^{(r+1)}), \tag{31}$$

avendo posto

$$x_s = z_1^{(s)} u_1 + \ldots + z_n^{(s)} u_n \qquad (s = 1, \ldots, r+1) \tag{32}$$

Si domanda: quale relazione passa ira l'iperpiano π e il punto X quando la $(r+1)$—*pla* $X(x_1, \ldots, x_{r+1})$ soddisfa all'equazione (27)?

Dimostreremo che l'algebra A determina nello spazio D_N costituito dagli iperpiani di S_N un sistema lineare di proiettività ad n parametri omogenei tale che la relazione richiesta é espressa dall'appartenenza del punto X al vertice della stella d'iperpiani D_{n-1} riempita dagli iperpiani omologhi di π per le proietività del sistema. Ne seguirà che come immagine dell'iperpiano dell' S'_r ipercomplesso, di equazione (27), potremo assumere il vertice S'_{N-n} di tale stella.

Ricordiamo intanto che l'equazione lineare omogenea in A (27) equivale ad un sistema di n equazioni lineari nelle incognite (31) nel corpo Γ e la cui matrice dei coefficienti è la trasposta della seconda matrice sinistra V' della $(r+1)$—*pla* $(\pi_1, \ldots, \pi_{r+1})$. La caratteristica di tale matrice è pertanto n, e il sistema rappresenta, in S_N, n iperpiani indipendenti $\pi'_1, \ldots, \pi'_n$ che determinano una stella D_{n-1} il cui vertice S'_{N-n} conterrà ogni punto X le cui coordinate (31) soddisfano al sistema cioe ogni punto X rispondente ad una $(r+1)$*pla* $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ soluzione dell'equazione (27). Assumeremo tale spazio S_{N-n} come immagine dell'iperpiano dell' S'_r ipercomplesso sinistro di equazione (27), o, come diremo, di coordinate, in A $(\pi_1, \ldots, \pi_{r+1})$,

Per dimostrare quanto sopra abbiamo affermato, consideriamo la seconda matrice sinistra della $(r+1)$—*pla* $(\pi_1, \ldots, \pi_{r+1})$, cioè la matrice

$$V = \left\| \begin{matrix} \mu_{\pi} \\ \\ \mu'_{r+1} \end{matrix} \right\| \tag{33}$$

Per quanto abbiamo detto gli elementi della s-ma colonna di questa matrice saranno i coefficienti della s-ma equazione dell'iperpiano π'_s, cioè le coordinate di questo iperpiano. Le prime n coordinate sono pertanto gli elementi della colonna s-ma della matrice μ'_{π_1} e cioè sono i numeri $K_{1s}^{(1)}$, $K_{2s}^{(1)}, \ldots, K_{ns}^{(1)}$ essendo, in generale

$$K_{is}^{(1)} = \sum_l^{1 \cdots n} \lambda_{lis} p_l^{(1)} \qquad (i, s = 1, \ldots, n) \tag{34}$$

e quindi tali prime n cordinate si ottengono applicando alle prime n coordinate dell'iperpiano π la sostituzione lineare di matrice

$$(35) \qquad Q_s = \begin{Vmatrix} \lambda_{11s} & \dots & \lambda_{n1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1ns} & \dots & \lambda_{nns} \end{Vmatrix}$$

Analogamente si osserva che il secondo gruppo di n elementi della colonna s-ma della matrice (33) sono gli elementi che si ottengono dal secondo gruppo di coordinate di π applicando la stessa sostituzione lineare di matrice Q_s. E così via di seguito, sicchè, in definitiva, le $N+1$ coordinate dell'iperpiano π'_s si ottengono applicando alle coordinate di π la sostituzione lineare di matrice

$$(36) \qquad (Q_s) = \begin{Vmatrix} Q_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_s & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_s \end{Vmatrix} \qquad (s = 1, \dots, n)$$

composta con $(r+1)^2$ matrici quadrate di ordine n di cui quelle poste nella diagonale principale sono tutte eguali alla matrice Q_s e le rimanenti sono la matrice nulla. Sicchè l'iperpiano π'_s è l'omologo di π nella proiettività avente per coefficienti la matrice (Q_s). Ne segue che l'iperpiano π' variabile nella stella D_{n-1} determinata da $\pi'_1, \dots, \pi'_n$ è l'omologo di π nella proiettività variabile nel sistema lineare determinato dalle n proiettività di matrici $(Q_1), \dots, (Q_n)$.

Osserviamo ora che la matrice Q_s data dalla (35) è la matrice μ_{u_s} dell'unità u_s. Combinando linearmente le matrici $Q_1, \dots Q_n$ secondo i numeri $\rho_1, \dots \rho_n$ si ottiene la matrice

$$(37) \qquad Q = \rho_1 Q_1 + \dots + \rho_n Q_n$$

che risulta, pertanto la matrice μ_y dell'elemento y di A di coordinate $\rho_1, \dots, \rho_n$ rispetto alle unità $u_1, \dots, u_n$. Ne segue che la matrice della proiettività variabile nel sistema lineare sudetto è la matrice

$$(38) \qquad (Q) = \begin{Vmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q \end{Vmatrix}$$

con Q matrice dell'elemento y corrente in A.

Le proiettività di questo sistema lineare, che risulta così determinato dall'algebra A, non formano, in generale gruppo, come si è potuto affermare per i due sistemi E_{n-1} e R_{n-1} perchè le matrici degli elementi di un'algebra non formano, in generale, gruppo. Il sistema lineare di proiettività di matrici (Q) è il sistema lineare, determinato in D_N da A, a cui sopra accennavamo e quindi resta dimostrato che la relazione fra l'iperpiano π e il punto X, quando vale il legame espresso dalle (27), ha questo significato geometrico: il punto X appartiene al vertice S_{N-n} della stella di iperpiani omologhi di π rispetto alla proiettività del sistema lineare di matrici (Q) al variare di Q fra le matrici degli elementi dell'algebra A. Nel seguito questo sistema lineare di proiettività di D_N lo indicheremo con K_{n-1}. Indicheremo invece con H_{n-1} l'analogo sistema di proiettività in D_N di matrici (Q) quando Q si fa variare fra le matrici *trasposte* delle matrici degli elementi di A. Il sistema K_{n-1} si dirà il *sistema diretto*, mentre il sistema H_{n-1} si dirà il *sistema trasposto*. Questo secondo sistema interviene quando si considera l'equazione

$$x_1 \pi_1 + \ldots + x_n \pi_n = 0 \tag{39}$$

con le incognite a sinistra e i coefficienti a destra, in A. Supposta la $(r+1)$ — *pla* $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ con la seconda caratteristica destra massima, cioè supposto che si tratti di un *punto* dello spazio ipercomplesso di seconda specie destro, qualora si considera definita a meno di un fattore a destra non nullo ne divisore dello zero, la relazione fra l'iperpiano π e il punto X espressa analiticamente dalla relazione (39) e che il punto X appartenga al vertice della stella di D_N formata dagl'iperpiani omologhi di π rispetto alla proiettività del sistema H_{n-1}. Ciò si dimostra in modo perfettamente analogo a quanto sopra abbiamo detto relativamente all'equazione (27) con le incognite a destra e i coefficienti a sinistra, Raccogliendo si ha il seguente

2° Teorema fondamentale. — *Ogni algebra* A *dotata di modulo, di ordine* n, *definita in un qualunque corpo numerico* Γ, *determina nello spazio* D_N *costituito dagl'iperpiani dello spazio proiettivo* S_N *legato al corpo* Γ *di dimensione* $N = n(r+1)-1$, *due sistemi lineari di proiettività ad* n *parametri omogenei: il sistema diretto* K_{n-1} *e il sistema trasposto* H_{n-1}. *Le matrici dei coefficienti di* K_{n-1}, *o di* H_{n-1}, *sono le matrici quadrate di ordine* $N+1$ *composte con* $(r+1)$ *matrici quadrate di ordine* n, *del tipo*

$$(Q) \qquad \begin{Vmatrix} Q & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & Q \end{Vmatrix}$$

essendo Q la matrice, o la trasposta della matrice, dell' elemento corrente in A, *e* O *è la matrice quadrata nulla di ordine* n.

La varietà degli spazi S_{N-n}, *vertici delle stelle descritte dagl' iperpiani omologhi di un generico iperpiano di* S_N *rispetto alle proiettività di* K_{n-1}, *o di* H_{n-1}, *fornisce una rappresentazione in* S_N *dello spazio ipercomplesso di seconda specie sinistro o destro, rispettivamente, costituito dagl' iperpiani dei due spazi ipercomplessi di prima specie* S'_r *e* S''_r *legati all' algebra* A.

Lo spazio S_{N-n} *immagine dell'iperpiano di* S'_r *o di* S''_r, *di equazione*

$$\pi_1 x_1 + \ldots + \pi_{r+1} x_{r+1} = 0 \qquad \text{o} \qquad x_1 \pi_1 + \ldots + x_{r+1} \pi_{r+1} = 0$$

rispettivamente, si ottiene intersecando gli n *iperpiani di* S_N *aventi per coordinate le* n *colonne della seconda matrice sinistra* V', *o destra* V'', *della* $(r+1)$—pla *di elementi di* A $(\pi_1, \ldots \pi_{r+1})$.

10. *Relazioni fra i quattro sistemi lineari di proiettività determinati in* S_N *dall'algebra* A.

In base al 1° e 2° teorema fondamentale sono legati all'algebra A in S_Λ il *gruppo reciproco* R_{n-1}, il *gruppo equivalente* E_{n-1}, il *sistema diretto* K_{n-1} e il *sistema trasposto* H_{n-1}. Ci proponiamo di fissare alcune reazioni esistenti fra questi quattro sistemi lineari di proiettività.

Intanto osserviamo che in S_N i vertici S_{N-n} delle stelle D_{n-1} di iperpiani sono gli spazi *duali* degli spazi S_{n-1}, pertanto la varietà degli spazi S'_{N-n} immagini degl' iperpiani dell' S'_r ipercomplesso è una figura duale della congruenza (S'_{n-1}) che rappresenta i punti di S'_r. Tale varietà di S'_{N-n} la diremo, pertanto una *congruenza inviluppo* e la indicheremo con (S'_{N-n}). Analogamente avremo una seconda congruenza inviluppo (S''_{N-n}) formata con gli spazi S''_{N-n} immagini degl' iperpeani dell' S''_r ipercomplesso. Sicchè i due sistemi (formanti gruppo) R_{n-1} e E_{n-1} generano le due congruenze luogo (S'_{n-1}) e (S''_{n-1}), i due sistemi K_{n-1} e H_{n-1} generano invece, le due congruenze inviluppo (S'_{N-n}) e (S''_{N-n}).

Cominciamo con l' osservare che:

I) *Gli spazi* S'_{N-n} *di* (S'_{N-n}) *sono invarianti rispetto al gruppo* R_{n-1}.

I') *Gli spazi* S''_{N-n} di S''_{N-n} *sono invarianti rispetto al gruppo* E_{n-1}.

Infatti se S'_{N-n} rappresenta l' iperpiano di S'_r di equazione

$$\pi_1 x_1 + \ldots + \pi_{r+1} x_{r+1} = 0 \tag{40}$$

e $X(x_1, \ldots, x_{r+1})$ è un punto di tale iperpiano, non solo il punto X di S_N immagine della $(R+1)$—*pla* $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ appartiene ad S'_{N-n}, ma deve appartenere ad S'_{N-n} ciascun punto immagine di una $(r+1)$—*pla* del tipo $(x_1 y, \ldots, x_{r+1} y)$, perchè questa $(r+1)$—*pla* è soluzione della (40) qualunque sia y in A. Ciò porta che ad S'_{N-n} deve appartenere tutto lo

spazio S'_{n-1} della congruenza (S'_{n-1}) passante per X, riempito dai punti omologhi di X rispetto alle proiettività del gruppo R_{n-1}. Ne segue che S'_{N-n} è trasformato in sè stesso da ogni proiettività di R_{n-1}, e che è costituito da spazi della congruenza (S'_{n-1}). Così è dimostrata la proprietà I). Analogamente si dimostra la I'). Si osservi esplicitamente che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto e un iperpiano dello spazio ipercomplesso S'_r *(o* S''_r*) si appartengano è che si appartengano i due spazi di* S_N *loro immagini.*

Chiamiamo polarità fondamentale di S_N la polarità nella quale ad ogni punto corrisponde l'iperpiano avente le stesse coordinate del punto (cioè la polarità determinata dall'iperquadrica avente per equazione la forma costituita dalla somma dei quadrati delle $N+1$ coordinate correnti eguagliata a zero. Le due congruenze (S'_{n-1}) e (S''_{n-1}) vengono trasformate dalla polarità fondamentale in due congruenze inviluppo che risulteranno di classe 1, essendo quelle di ordine 1. (Si noti che queste due congruenze inviluppo possono servire, come le due congruenze date, a rappresentare i due spazi ipercomplessi S'_r ed S''_r, e si potrebbe ottenere direttamente da S'_r ed S'' rappresentando le $(r-1)$*-ple* di elementi di A negl'iperpiani di S_N anzichè nei punti di questo spazio). Vogliamo dimostrare che:

II) *La congruenza inviluppo* (S'_{N-n}), *immagine degl'iperpiani di* S'_r, *è la trasformata, mediante la proiettività del sistema diretto* K_{n-1}, *della congruenza inviluppo polare di* (S''_{n-1}) *nella polarità fondamentale.*

II') *La congruenza inviluppo* (S''_{N-n}), *immagine degl'iperpiani di* S''_r *è la trasformata, mediante le proiettività del sistema trasposto* H_{n-1}, *della congruenza inviluppo polare di* (S'_{n-1}) *nella polarità fondamentale.*

Infatti lo spazio S'_{N-n} immagine dell'iperpiano di S'_r di equazione (40) si ottiene trasformando con le proiettività del gruppo diretto K_{n-1} l'iperpiano π avente per coordinate le coordinate in Γ della $(r+1)-pla$ $(\pi_1, \ldots, \pi_{r+1})$, iperpiano che è il polare del punto P di S_N che ha quelle stesse coordinate. Ora se moltiplichiamo *a sinistra* l'equazione (40) per un fattore in A non nullo nè divisore dello zero, si ottiene un'equazione che rappresenta lo stesso iperpiano. Per tale moltiplicazione P si trasforma in un punto P'' dello spazio S''_{n-1} della congruenza (S''_{n-1}) passante per P, e conseguentemente l'iperpiano π si trasforma nell'iperpiano π'' polare di P'' nella polarità fondamentale. Al variare del fattore di moltiplicazione a sinistra, P'' descriverà S''_{n-1} e π'' descriverà la stella che ha per vertice lo spazio S_{N-n} polare di S''_{n-1}. Applicando al generico iperpiano di questa stella le proiettività del sistema diretto K_{n-1} si deve ottenere la stella d'iperpiani che ha per vertice l' S'_{N-n} immagine dell'iperpiano di S'_r considerato. Ciò significa che questo spazio S'_{N-n} è il trsformato di S_{N-n} rispetto a tutte le proiettività di K_{n-1}. Così resta dimostrato il teorema II). Analogamente si dimostra il teorema II').

Un interessante corollario dei teoremi II) e II') si ha nel caso che

l'algebra A non sia a determinante identicamente nullo (nel qual caso, come abbiamo dimostrato, lo sazio numerico di prima specie sinistro (destro) coincide con lo spazio numerico di seconda specie destro (sinistro)). In tal caso il determinante della matrice di un generico elemento di A, è diverso da zero. conseguentemente la generica proiettività del sistema diretto K_{n-1}, e del sistema trasposto H_{n-1} è non degenere. Se W è una proiettività non degenere di K_{n-1} la reciprocità non degenere prodotto della polarità fondamentale e di W trasformerà, per il teorema II), la congruenza (S''_{n-1}) nella congruenza inviluppo (S'_{N-n}) e quindi questa congruenza sarà di classe 1, essendo la congruenza (S''_{n-1}) di ordine 1. La corrispondenza che nasce fra le due congruenze sarà biunivoca senza eccezioni (ciò dimostra che l'ente astratto spazio ipercomplesso di prima specie destro, rappresentato da (S''_{n-1}) coincide con l'ente astratto spazio ipercomplesso di seconda specie sinistro). Analoghe osservazioni si fanno tenendo conto del teorema II). Si ha pertanto:

III) *Se l'algebra A è a determinante non identicamente nullo, le due congruenze inviluppo* (S'_{N-n}) *e* (S''_{N-n}) *sono di classe 1, e si possono mettere in corrispondenze biunivoca senza eccezione con le congruenze luogo* (S'_{n-1}) *ed* (S'_{n-1}) *mediante una reciprocità non degenere che trasforma* (S''_{n-1}) *in* (S'_{N-n}) *e una reciprocità non degenere che trasforma* (S'_{n-1}) *in* (S''_{N-1}).

Le proposizioni I), I'), II), II') ci dànno delle proprietà dei quattro sistemi R_{n-1}, E_{n-1}, K_{n-1} ed H_{n-1} rispetto alle due congruenze inviluppo (S_{N-n}) e (S_{N-n}), e alle due congruenze luogo (S'_{n-1}) ed (S''_{n-1}). Andiamo ora a stabilire alcune relazioni che legano i quattro sistemi tra loro. Si vengono a trovare delle interpretazioni geometriche di alcuni interessanti teoremi del FROBENIUS. Uno di questi teoremi è il seguente: [8]) Se x ed y sono due qualunque elementi di un'algebra A, esistono in A due elementi z e t tali che

$$\mu_z = \mu'_y \mu_x \quad , \quad \mu_t = \mu_x (\mu''_y)^{-1} \tag{40}$$

Considerando la trasposta della matrice μ_z si ha dalla prima delle (40)

$$(\mu_z)_{-1} = (\mu_x)_{-1} (\mu'_y)_{-1} \quad . \tag{41}$$

Da questa relazione si ricava che la matrice del tipo (M) con $M = (\mu'_y)_{-1}$ moltiplicata a sinistra per la matrice dello stesso tipo con $M = (\mu_x)_{-1}$ ci dà la matrice dello stesso tipo con $M = (\mu_z)_{-1}$. Ciò porta dunque che il prodotto $\alpha\,\beta$ di una proiettività α del sistema trasposto H_{n-1} per una

[8]) Loc. cit. [1]), n, 187 della Parte seconda.

proiettività β del gruppo equivalente E_{n-1} è sempre una proiettività di H_{n-1}, cioè fra i due sistemi E_{n-1} ed H_{n-1} si ha la relazione

$$H_{n-1}\, E_{n-1} = H_{n-1} \tag{42}$$

Analogamente dalla seconda della (40) si ricava che il prodotto αβ di una proiettività α del sistema K_{n-1} per una proiettività β del gruppo reciproco R_{n-1} è sempre una proiettività di K_{n-1}, cioè fra i due sistemi K_{n-1} ed R_{n-1} si ha la relazione

$$K_{n-1}\, R_{n-1} = K_{n-1} \quad . \tag{43}$$

Si ha pertanto:

IV) *Il prodotto del sistema trasposto* H_{n-1} *per il gruppo equivalente* E_{n-1} *è lo stesso sistema trasposto.*

IV') *Il prodotto del sistema diretto* K_{n-1} *per il gruppo reciproco* R_{n-1} *è lo stesso sistema diretto.*

Si osservi ora che le relazioni che legano le costanti di moltiplicazione dell' algebra A si traducono nella relazione

$$\mu'_x\, \mu''_y = \mu''_y\, \mu'_x \tag{44}$$

dalla quale si ricava, come sopra, la proprietà:

V) *I due gruppi di proiettività reciproco* R_{n-1} *ed equivalente* E_{n-1} *sono permutabili fra di loro nel senso che ogni proiettività di uno dei due gruppi è permutabile con ciascuna proiettività dell'altro gruppo.*

Si osservi, in particolare, che se l'algebra A è commutativa il gruppo $R_{n-1} = E_{n-1}$ è abeliano.

Un' altra relazione, che inverte la proprietà V) *nel caso che l'algebra* A *non sia a determinate costantemente nullo,* si ricava da un altro interessante teorema del FROBENIUS [9]) e precisamente. Se il determinante di A non è costantemente nullo e $\| \upsilon_{ij} \|$ una matrice con gli elementi in Γ permutabile con la matrice sinistra (destra) di A, esiste in A un elemento y la cui matrice destra (sinistra) è la matrice $\| \upsilon_{ij} \|$. Da questo teorema si ricava pertanto che:

VI) *Se l' algebra* A *non è a determinante costantemente nullo il gruppo reciproco* R_{n-1} *(equivalente* E_{n-1}*) è il gruppo delle proiettività di* S_N *permutabili con ciascuna proiettività del gruppo* E_{n-1} (R_{n-1}).

[9]) Loc. cit. [1]), Parte seconda, n. 194.

§ 2. — Le riemanniane degli spazi ipercomplessi.

1. *I due sistemi lineari di ipersuperficie di* S_N *determinati dall' algebra* A.

In S_N, ambiente delle due congruenze lineari (S'_{n-1}) e (S''_{n-1}) immagini dei due spazi ipercomplessi di prima specie sinistro S'_r e destro S''_r, legati all'algebra A, consideriamo un S_{N-n} generico, supposto ottenuto congiungendo $N-n+1$ punti indipendenti $P_1, P_2, \ldots, P_{N-n+1}$. Diciamo V la varietà riempita dagli spazi della congruenza (S'_{n-1}) che si appoggiano ad S_{N-n}. Perchè l' S'_{n-1}, della congruenza generato da un punto X, cioè lo spazio congiungento i punti $X'_1, \ldots, X'_n$ aventi per coordinate le righe della matrice O'x, si appoggi ad S_{N-n}, occorre e basta che gli $N+1$ punti X'_i e P_j $(i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, N-n+1)$ siano dipendenti, cioè occorre e basta che sia nullo il determinante formato con le coordinate di tali punti. Ora se il punto X è immagine della $(r+1)$—*pla* $(x_1, \ldots x_{r+1})$, le prime n righe di tale determinante sono le righe della matrice

$$O'\mathrm{x} = \left\| \mu_{x_1}\ \mu'_{x_2}\ \cdots\ \mu'_{x_{r+1}} \right\| \tag{1}$$

e quindi quel determinante eguagliato a zero dà un'equazione di grado n nelle coordinate, in Γ, del punto X di S_N, sicchè la varietà V è una ipersuperficie di S_N di ordine n. (Si osservi che se Γ non è il corpo complesso non si ha il solito significato geometrico dell' ordine. Quando Γ è il corpo reale, si suole prolungare nel corpo complesso e quindi la V viene ad essere costituita dai punti reali di una ipersuperficie reale dello spazio complesso ad N dimensione, di ordine n, la cui equazione è data da quel determinante eguagliato a zero). Intanto abbiamo, ripetendo quando abbiamo detto anche per l'altra congruenza (S''_{n-1}):

I.) *Gli spazi della congruenza* (S'_{n-1}), *o* (S''_{n-1}), *immagini dei due spazi ipercomplessi di prima specie sinistro e destro legati all'algebra* A, *appoggiati ad un* S_{N-n} *di* S_N, *costituiscono una ipersuperficie di ordine* n, *la cui equazione si ottiene eguagliando a zero il determinante di ordine* N+1 *avente per prime* n *righe le righe della matrice* O'x, *o* O''x, *della* (r+1)—pla $(x_1, \ldots x_{r+1})$ *di elementi correnti in* A. *e per rimanenti righe le coordinate di* N—n+1 *punti indipendenti di* S_{N-n}.

Si osservi ora che sviluppando il determinante in questione, secondo i minori delle prime n righe, l'equazione dell' ipersuperficie V si viene ad esprimere come una combinazione lineare delle equazioni che si ottengono eguagliando a zero detti minori (che non sono altro che i minori estratti dalla matrice O'x o O''x) sicchè la ipersuperficie V, al variare dell'S_{N-n} che la determina, descrive un sistema lineare. Diciamo R' o R'' la dimensione di tale sistema, indicando con $R+1$ il massimo numero di equazioni

indipendenti che si ottengono eguagliando a zero i minori estratti dalla matrice O'_X o O''_X. Gl'interi R' ed R'' sono, pertanto, determinati dall'algebra A. Indichiamo con (V') e (V'') i due sistemi lineari di ipersuperficie, di dimensioni R' ed R'', che così si ottengono. Ognuno di tali sistemi è *composto* mediante le congruenze (S'_{n-1}) ed $S''_{n-1})$ rispettivamente. Infatti se X è un generico punto della ipersuperficie V, appartiene a V ogni punto Y dell' S'_{n-1} della congruenza (S'_{n-1}) passante per X, dato che ogni tale punto ha le coordinate combinazione lineari delle coordinate dei punti $X'_1, \ldots, X'_n$, e i relativi punti $Y'_1, \ldots, Y'_n$ aventi per coordinate le righe di O'_Y, essendo punti di S'_{n-1} nel loro insieme risultano, come $X'_1, \ldots, X'_n$, dipendenti dai punti $P_1, \ldots P_{N-n+1}$, e quindi il punto Y soddisfa all'equazione di V.

Si ha pertanto:

II.) *L'algebra* A *determina in* S_N *due sistemi lineari di ipersuperficie di ordine* n, *di dimensioni* R' *e* R'', (V') *e* (V''), *composti mediante le congruenze* (S'_{n-1}) e (S''_{n-1}) *rispettivamente.*

2. *Le riemanniane degli spazi ipercomplessi* S'_r *ed* S''_r.

Col metodo solito mettiamo in corrispondenza proiettiva le ipersuperficie del sistema lineare (V') di dimensione R', con gl' iperpiani di uno spazio $S_{R'}$ legato al corpo numerico Γ. Alle ipersuperficie di (V') passanti per un generico punto X di S_N, e quindi passanti di conseguenza per la S'_{n-1} della congruenza (S'_{n-1}) determinato da X, corrisponderanno in $S_{R'}$ una stella d' iperpiani il cui vertice X' si assumerà come immagine dello spazio S'_{n-1} e quindi come immagine del punto ipercomplesso di S'_r che questo spazio S'_{n-1} rappresenta. Variando S'_{n-1} in (S'_{n-1}) il punto immagine X' descriverà in $S_{R'}$ una varietà W' che si dirà la *riemanniana dell'* S'_r *ipercomplesso*. Analogamente, in corrispondenza al sistema lineare (V'') si determina in uno spazio $S_{R''}$ legato al corpo Γ, una varietà di punti W'' che risulta in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con lo spazio S''_r e che si dirà la *riemanniana* di questo spazio ipercomplesso. La W'' rappresenta la congruenza lineare (S''_{n-1}) immagine dell' S''_r, spazio ipercomplesso di prima specie destro legato ad A.

3. *Punti base dei sistemi lineari di ipersuperficie* (V') *e* (V'').

Un punto X di S_N per essere punto base del sistema lineare di ipersuperficie (V') deve annullare tutti i minori estratti dalla matrice di O'_X, perchè in tal caso, e solo in tal caso X è un punto comune alle ipersuperficie determinanti il sistema (V') e quindi è punto base di (V'). Ora i punti che annullano tutti i minori estratti dalla matrice O'_X son tutti e soli i punti singolari della congruenza (S'_{n-1}) cioè tutti e soli i punti X rispondenti ad $(r+1)-ple$ con la prima caratteristica sinistra $<n$. Ana-

loga osservazione si fa per il sistema *(V'')* i cui punti base sono tutti e soli i punti singolari della congruenza (S''_{n-1}). Si ha pertanto:

III.) *I punti base dei sistemi lineari di ipersuperficie* (V') *e* (V'') *sono tutti e solo i punti singolari delle congruenze* (S'_{n-1}) *e* $(S''_{n-1}$ *rispettivamente.*

Nota. — Quando le due congruenze lineari (S'_{n-1}) e (S''_{n-1}) si rappresentano nei punti delle due varietà W' e W'', dove sono rappresentati *senza eccezioni*, va inteso che bisogna considerare soltanto i punti che rispondono agli spazi delle due congruenze e quindi ai punti di S_N che *determinano* tali spazi; *vanno esclusi pertanto i punti singolari della congruenza* (quando ne esistono). Ora i punti singolari delle congruenze sono i punti base dei sistemi *(V')* e *(V'')*, *nelle varietà* W' e W'' *vanno considerati, pertanto, soltanto i punti immagini di punti non singolari delle congruenze.* Le due varietà W' e W'' si possono *completare aggiungendo i punti che provengono dai punti base dei due sistemi lineari* (V') *e* (V''), che ne rappresentano le sezioni iperpiane. In questo caso si deve avvertire esplicitamente che quando si dice che le varietà W' e W'' sono le riemanniane degli spazi ipercomplessi S'_r ed S''_r, va inteso che da queste varietà *vanno esclusi i punti rispondenti agli eventuali punti base dei sistemi* (V') *e* (V''). Solo in tal caso si può parlare di *corrispondenza biunivoca senza eccezioni* fra i punti dello spazio ipercomplesso e la sua riemanniana.

4. *Equazioni parametriche delle riemanniane* W' *e* W''.

Siano

$$f_1(z_j^{(s)}) = 0 \,, \; . \; . \; . \; , \; f_{R'+1}(z_j^{(s)}) = 0 \tag{2}$$

le equazioni di $R'+1$ ipersuperficie indipendenti del sistema (V'), cioe le equazioni che si ottengono eguagliando a zero $R'+1$ determinanti indipendenti dalla matrice O'_X, prima matrice sinistra della $(r+1)$—*pla* $(x_1, \dots, x_{r+1})$. Se indichiamo con $(\rho'_1, \dots, \rho'_{R'+1})$ le coordinate del punto corrente nello spazio proiettivo $S_{R'}$, legato al corpo Γ, le equazioni parametriche della riemanniana W' dell' S'_r ipercomplesso sinistro legato ad A, sono date da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'_1 = f_1(z_j^{(s)}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \rho'_{R'+1} = f_{R'+1}(z_j^{(s)}) \end{array} \right. \tag{3}$$

con gli $N+1$ parametri omogenei sovrabbondanti $z_j^{(s)}$, coordinate del punto variabile in S_N. I punti di W' si ottengono in corrispondenza ai punti di S_N non singolari per la congruenza (S'_{n-1}) (cioe per quei punti che non

annullano tutte le f_j), e sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con gli spazi di detta congruenza.

Analogamente si scrivono le equazioni parametriche della riemannia W'' dell'S''_r ipercomplesso destro legato ad A. Esse sono date da

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho''_1 = g_1(z_j^{(s)}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \rho''_{R''+1} = g_{R''+1}(z_j^{(s)}) \end{cases}$$

essendo i polinomi $g_i(z_j^{(s)})$ $R''+1$ determinanti indipendenti estratti dalla matrice $O''\text{x}$, e $(\rho''_1, \dots, \rho''_{R''+1})$ le coordinate del punto corrente nello spazio $S_{R''}$ legato al corpo Γ.

Volendo scrivere le equazioni parametriche delle riemanniane W' e W'' non con $N+1$ parametri omogenei sovrabbondanti, ma con $nr+1$ parametri omogenei (si ricordi che la dimensione, rispetto a Γ, di S'_r, della congruenza immagine (S'_{n-1}), e quindi della Riemanniana W', è nr, cioè $N-n+1$) si può procedere in questo modo. Si consideri in S_N uno spazio S_{N-n+1} in posizione generica rispetto alla congruenza (S'_{n-1}). Uno spazio S'_{n-1} della congruenza seca S_{N-n+1} in un punto P, viceversa per un punto P di S_{N-n+1} passa uno spazio della congruenza, quindi si viene a stabilire una corrispondenza generalmente biunivoca fra la congruenza (S'_{n-1}) e l'S_{N-n+1}. Ne segue che le coordinate grasmaniane dello spazio S'_{n-1} variabile nella congruenza, cioè i minori estratti della matrice $O'\text{x}$, saranno funzioni razionali intere omogenee delle $N-n+2$ coordinate omogenee del punto P variabile in S_{N-n+1}. Sostituendo nelle (3) ad f_j, che è un minore di $O'\text{x}$, la corrispondente funzione delle coordinate di P che esprime tale minore di $O'\text{x}$, si troveranno le equazioni parametriche della W' in funzione di $N-n+2=nr+1$ parametri omogenei, e quindi non sovrabbondanti. Si viene così ad avere la rappresentazione di W' nello spazio S_{N-n+1}, cioè nello spazio S_{nr}, fissato in S_N, e quindi anche la rappresentazione dell'S'_r ipercomplesso in tale S_{nr}. S'intende che *tale rappresentazione*, a differenza di quella nella varietà W', *è con eccezioni*. Fanno eccezioni in S_{nr} i punti singolari della congruenza che eventualmente può contenere e i punti che appartengono ad uno stesso spazio della congruenza, punti che vengono ad essere immagini di uno stesso spazio della congruenza e quindi di uno stesso punto (di W' o) dell'S'_r ipercomplesso. La W' risulta, essa stessa, rappresentata di S_{nr} con corrispondenza generalmente biunivoca e quindi la W' è razionale *rispetto al corpo* Γ.

Nella rappresentazione di W' in S_{nr} le sezioni iperpiane saranno rappresentate da un sistema lineare di ipersuperficie di S_{nr}, e precisamente dell'intersezione con S_{nr} del sistema lineare di ipersuperficie (V') di S_N, sistema che rappresenta la W' in S_N.

In pratica come spazio rappresentativo S_{nr} si può scegliere in S lo

spazio congiungente $nr+1$ punti fondamentali del sistema di coordinate che si ottiene annullando $n-1$ coordinate [illegible], e quindi le equazioni parametriche cercate della W' con $nr+1$ parametri omogenei non sovrabbondanti si ottengono dalle [illegible] annullando nelle [illegible] quelle $n-1$ [illegible].

Analoghe osservazioni si fanno per l'altra riemannia W'', che sarà rappresentata in un S_{nr} di S_N dal sistema lineare di ipersuperficie che si ottiene intersecando con S_{nr} il sistema (V''). Raccogliendosi il seguente

3° Teorema fondamentale. — *In corrispondenza ad uno spazio ipercomplesso di prima specie sinistro S'_r, o destro S''_r, legato ad un' algebra* A *dotata di modulo, di ordine* n, *si può costruire in uno spazio legato al corpo* Γ *in cui l'algebra è definita, una varietà* W' *o* W'', *in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con i punti di* S' *o* S'', [illegible] *riemanniane di* S' *e* S'' *sono rappresentate nello spazio* S_N *legato al corpo* Γ, *con* $N=n(R+1)-1$, *da due sistemi lineari di ipersuperficie* (V') *e* (V'') [illegible] (S_{N-1}) *e* (S_{N-1}) *rispettivamente, che forniscono la prima rappresentazione di* S'_r *ed* S''_r. *Le dimensioni* R' *ed* R'' *degli spazi ambienti delle varietà* W' *e* W'', *che ci danno la seconda rappresentazione di* S'_r *ed* S''_r, *sono dati rispettivamente dal numero massimo dei determinanti linearmente indipendenti che si possono estrarre dalla prima matrice sinistra* O'_X *o destra* O''_X *della* (r+1)—pla X $(x_1 \ldots . . x_{r+1})$ *di elementi correnti in* A *diminuito di 1.*

Eguagliando tali R'+1, *o* R''+1 *minori alle* R'+1 *o* R''+1 *coordinate del punto corrente nello spazio* $S_{R'}$, *o* $S_{R''}$ *legato a* Γ *si ottengono le equazioni parametriche di* W' *o* W'' *con* N+1 *parametri omogenei sovrabbondanti.*

Le varietà W' *e* W'' *sono varietà razionali rispetto a* Γ *e si possono rappresentare, con eccezioni, in un* S_{nr} *legato al corpo* Γ, *scelto genericamente in* S_N, *mediante il sistema lineare di ipersuperficie che si ottengono intersecando* S_{nr} *con i sistemi lineari* (V') *e* (V''). *Si ottiene così una terza rappresentazione (con eccezioni) dei due spazi ipercomplessi* S'_r *ed* S''.

Sulla previsione delle tensioni in alcuni recipienti cilindrici.

Nota del dott. ing. **Mario Turra**, *presentata dal socio ord.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 7 novembre 1942 - XXI)

Sunto. — Si espone un procedimento di calcolo destinato allo studio del comportamento elastico di taluni collettori di caldaie a vapore. Allo scopo di evitare le complicazioni che deriverebbero agli sviluppi dal mettere in conto l'effettiva conformazione della sezione trasversale, si introduce una ipotesi approssimativa consistente nel sostituire agli effetti dei calcoli un certo tronco della struttura con altro equivalente. Si discutono i risultati di un'applicazione numerica ad un concreto.

Abbastanza frequenti nella tecnica costruttiva, e più specialmente nel campo dei generatori di vapore, sono gli esempi di recipienti cilindrici, a profilo interno circolare, il cui mantello sia costituito da due falde aventi spessori differenti.

Si tratta di costruzioni destinate a scopi speciali e nel caso dei generatori di vapore, nei quali siffatti recipienti hanno generalmente funzione di corpi collettori, tale speciale forma viene giustificata dalla necessità di conferire alla regione del mantello nella quale si inseriscono i tubi uno spessore più abbondante, come è necessario a cagione dell'indebolimento dovuto alla presenza dei fori.

Pur essendo normalmente entrambi gli spessori delle due falde piccoli rispetto al diametro, questi recipienti, dal punto di vista del comportamento elastico, si allontanano sensibilmente da quelli ordinari in parete sottile. Notiamo infatti che, risultando la fibra geometrica della sezione trasversale costituita da due archi circolari e concentrici di raggio diverso, essa non può essere assunta a rappresentare, come negli ordinari recipienti cilindrici circolari di piccolo e costante spessore, la funicolare del carico. Nell'assetto delle tensioni nello spessore sono quindi presenti momenti flettenti i quali, specialmente nei pressi del collegamento fra le due falde, danno luogo a sollecitazioni del materiale molto alte e in certi casi tali da pregiudicare la stabilità del recipiente. Questo esaltarsi delle tensioni è dovuto alla rapida variazione dello spessore ed è perciò che nella pratica costruttiva si cerca di realizzare un raccordo che, compatibilmente con la semplicità della lavorazione, risulti quanto più ampio è possibile.

Accanto all'opportunità di un tale accorgimento si è acquisita altresì la necessità di attribuire agli spessori delle dette falde valori sensibilmente

più elevati di quanto solitamente non occorra per gli ordinari recipienti a spessore costante, al che si provvede nell'uso maggiorando i valori indicati dall'ordinario proporzionamento dei recipienti in parete sottile, in misura consigliata dalla pratica esperienza.

È facile però rilevare gli inconvenienti di un siffatto procedimento giacche, ove si tratti di proporzionare un organo del tipo in discorso per i cui rapporti dimensionali non si possegga adeguata scorta di dati sperimentali e non si possa perciò ricorrere a criteri comparativi, l'assegnamento degli spessori risulterà affetto da gravi incertezze.

In questa nota ci proponiamo di esporre brevemente un procedimento di calcolo per i recipienti in parola, il quale, superate con opportuna ipotesi semplificativa le complicazioni cui si andrebbe incontro per mettere in conto la presenza del raccordo tra le due falde, è in grado di fornire utili indicazioni sulla distribuzione delle tensioni.

Rappresenti la fig, 1 la sezione di un recipiente cilindrico a due falde nel quale, secondo quanto è ormai invalso nella tecnica, non compaiono

Fig. 1.

giunti chiodati; il che si ottiene, o ricavando direttamente il recipiente dal massello per fucinatura, successiva tornitura e piallatura, o ricorrendo alla saldatura delle due falde.

L'assenza dei giunti chiodati non è però essenziale per l'applicazione

del procedimento giacchè, e lo vedremo in seguito, salvo qualche lieve complicazione degli sviluppi si può agevolmente portare in conto anche la presenza di tali giunti.

Supposto che il fascio tubiero, facente capo alla falda più grossa, non influenzi in modo sensibile la rigidità del recipiente e quindi la distribuzione delle tensioni nello spessore, ipotesi questa tanto più accettabile quanto più lunghi e di più piccolo diametro sono i tubi [1], potremo, per la simmetria della sezione rispetto alla AB (fig. 1) e per la natura delle forze agenti, limitarci ai fini dei calcoli allo schema di fig. 2. In tale schema il passaggio da uno spessore all' altro è supposto aver luogo bruscamente mediante un gradino, la posizione del quale sarà, come vedremo, determinata in modo da rendere trascurabili gli effetti della semplificazione sui risultati.

Nelle condizioni ora precisate la parte di struttura che si considera, soggetta all'azione della pressione p agente dell' interno, potrà essere supposta incastrata in B e libera all' estremo A, in corrispondenza del quale agiranno unicamente il momento μ e, nel baricentro della sezione, lo sforzo normale N: le due incognite iperstatiche del problema.

Posto, con riferimento alla figura detta:

$$1) \qquad \begin{aligned} R_\alpha &= R + \frac{1}{2} s_\alpha = R \cdot a \\ R_\beta &= R + \frac{1}{2} s_\beta = R \cdot b \end{aligned}$$

essendo eguale all'unità la lunghezza della struttura nel senso normale al piano della figura, e supposto inoltre che il tronco così isolato dal recipiente sia sufficientemente lontano dai fondi perchè non ne risenta gli effetti, si avrà, per il momento flettente M, lo sforzo normale N e quello di taglio T, presenti nelle sezioni generiche rispettivamente dell'arco AC e dell' arco CB:

$$2) \qquad \begin{cases} M_\alpha = \mu - NR(1-\cos\alpha) + pR^2a(1-\cos\alpha) \\ N_\alpha = N\cos\alpha + pR(1-\cos\alpha) \\ T_\alpha = -(N-pR)\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_\beta = \mu - NR(a-b\cos\beta) + pRb(1-\cos\beta) \\ N_\beta = N\cos\beta + pR(1-\cos\beta) \\ T_\beta = -(N-pR)\,\text{sen}\,\beta \end{cases}$$

[1]) Tale effetto non è ad esempio trascurabile nei collettori a due falde non coassiali (collettori a D). Si veda al proposito il lavoro dell' A.: *L' influenza del fascio tubiero nella resistenza dei collettori semicilindrici*. Ricerche d' Ingegneria, 1942, N. 5.

Per ricavare i valori delle due incognite μ ed N ricorreremo ai noti teoremi sulle derivate del lavoro di deformazione, nel computo del quale terremo conto dei contributi apportati sia dal momento flettente, che dallo sforzo normale e da quello di taglio, presenti in ciascuna sezione, e terremo ancora conto della mutua influenza del momento flettente e dello sforzo normale.

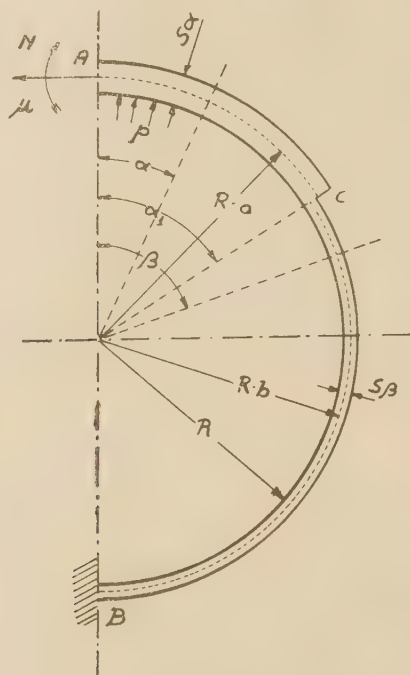



Fig. 2.

L'espressione generica del lavoro di deformazione che adotteremo per i due archi, considerate le convenzioni per i segni di μ e di N stabiliti nella fig. 2, è:

$$L = \int_0^{s_1} \left(\frac{M^2}{2\,E\gamma\,Rs} + \frac{N^2}{2\,Es} - \frac{MN}{E\,Rs} + t\,\frac{T^2}{2\,Gs} \right) ds \tag{3}$$

a chiarimento della quale basta avvertire che:

$$\gamma = \frac{s^2}{12\,R}\left[1 + \frac{4}{15}\left(\frac{s}{2R}\right)^2\right] \tag{4}$$

porta in conto la curvatura dell'arco [2]) e t è il fattore del taglio a cui per la sezione rettangolare si può attribuire il valore 1,5.

Il lavoro di deformazione complessivo di tutto l'arco ACB sarà evidentemente la somma dei lavori di deformazione relativi ai due archi AC, CB, e per ottenerlo basterà introdurre successivamente nella 3) le espressioni dei momenti, degli sforzi normali e di quelli di taglio forniti dalle 2).

Nel calcolo di questo lavoro di deformazione è implicita l'ipotesi che la sezione in cui si verifica il salto di spessore sia assolutamente rigida e si mantenga perciò perfettamente piana. Perchè sia presumibile che questa ipotesi, insieme alla opportuna scelta della sezione in cui si verifica il detto salto, non influisca praticamente sui risultati diremo soltanto in seguito per chiarezza di esposizione.

Ricorrendo ora alle:

$$5)\qquad \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial N} = 0$$

ottenute da ovvie considerazioni sugli spostamenti subiti nella deformazione della sezione A, si ricaveranno due equazioni attraverso le quali si potranno determinare μ ed N.

Posto a tal fine:

$$6)\qquad \begin{aligned} \frac{s_\beta}{\varepsilon s_\alpha} \cdot \frac{\gamma_\beta}{\gamma_\alpha} &= \varkappa_1 \\ \frac{s_\beta}{\varepsilon s_\alpha} \cdot \frac{\gamma_\beta}{R} &= \varkappa_2 \\ \frac{\gamma_\beta}{R} &= \varkappa_3 \end{aligned}$$

nelle quali:

$$7)\qquad \varepsilon = \frac{t_1/2}{\dfrac{2\,t_2^2}{\sqrt{t_2^2 - D^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{t_2 + D}{t_2 - D}} - \dfrac{\pi}{2}\,t_2 + \dfrac{t_1}{2} - D}$$

è un coefficiente che porta in conto l'indebolimento della falda di maggior spessore causato dalla presenza dei fori [3]) (piastra tubiera), dopo aver

[2]) L'approssimazione con cui la 4) esprime il valore di γ è quella che si ottiene limitandone lo sviluppo a due termini. Vedasi: TIMOSHENKO e LESSELLS: *Festigkeitslehre.* Springer, 1928, pag. 202.

[3]) Vedasi al riguardo: P. E. BRUNELLI — Atti R. Accademia Scienze Torino, vol. LXVIII, 1937-38; ed inoltre M. TURRA, *Su di un tipo speciale di collettore.* Ricerche d' Ingegneria, 1942 n. 3.

osservato che è:

$$
8) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \mu} = 1 \qquad &;\qquad &\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \mu} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \mu} = 0 \\
&\frac{\partial M_\alpha}{\partial N} = - Ra\,(1 - \cos\alpha) \qquad &;\qquad &\frac{\partial M_\beta}{\partial N} = - R\,(a - b\cos\beta) \\
&\frac{\partial N_\alpha}{\partial N} = \cos\alpha \qquad &;\qquad &\frac{\partial N_\beta}{\partial N} = \cos\beta \\
&\frac{\partial T_\alpha}{\partial N} = - \operatorname{sen}\alpha \qquad &;\qquad &\frac{\partial T_\beta}{\partial N} = - \operatorname{sen}\beta
\end{aligned}
$$

si otterrà, con qualche riduzione:

$$
\varkappa_1 \int_0^\alpha M_\alpha d\alpha + \int_\alpha^\pi M_\beta d\beta - \varkappa_2 R \int_0^\alpha N_\alpha\, d\alpha - \varkappa_3 R \int_\alpha^\pi N_\beta d\beta = 0
$$

$$
9) \qquad (\varkappa_1 a - \varkappa_2) \int_0^\alpha M_\alpha \cos\alpha\, d\alpha + (b - \varkappa_3) \int_\alpha^\pi M_\beta \cos\beta\, d\beta -
$$

$$
- \frac{2tR}{1 - \frac{1}{m}} \left[a\varkappa_2 \int_0^\alpha T_\alpha \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha + b\varkappa_3 \int_\alpha^\pi T_\beta \operatorname{sen}\beta\, d\beta \right] = 0
$$

Nello stabilire le 9) fu tenuto conto della relazione: $E = 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) G$ e fu, là dove occorreva, tenuto conto anche dell'impedita deformazione trasversale col porre all'occasione $\frac{E}{1 - \frac{1}{m^2}}$ in luogo di E.

Posto infine:

$$
A = \frac{t}{1 - \frac{1}{m}} - \frac{1}{2} \qquad ; \qquad B = \frac{t}{1 - \frac{1}{m}} + \frac{1}{2}
$$

la risoluzione delle 9), dopo calcoli piuttosto laboriosi che omettiamo, conduce alle:

$$10)\quad \begin{cases} \mu[(\varkappa_1-1)\alpha_0+\pi]-NR\left[\left\{(\varkappa_1-1)\alpha_0+\pi\right\}a+(b-a\varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3)\operatorname{sen}\alpha_0\right] \\ \qquad +pR^2[(a\varkappa_1-\varkappa_2+\varkappa_3-b)\alpha_0+(b-\varkappa_3)\pi+(b-a\varkappa_1+\varkappa_2-\varkappa_3)\operatorname{sen}\alpha_0]=0 \\ \\ \mu[a\varkappa_1-\varkappa_2+\varkappa_3-b]-NR\left[\left\{\frac{1}{2}(b^2-a^2\varkappa_1)-A(a\varkappa_2-b\varkappa_3)\right\}\frac{\alpha_0}{\operatorname{sen}\alpha_0}-\right. \\ \qquad -\left(\frac{1}{2}b+A\varkappa_3\right)\frac{\pi b}{\operatorname{sen}\alpha_0}+(a\varkappa_1-\varkappa_2+\varkappa_3-b)a+\left\{\frac{1}{2}(b^2-a^2\varkappa_1)+\right. \\ \qquad \left.\left.+B(a\varkappa_2-b\varkappa_3)\right\}\cos\alpha_0\right]+pR^2\left[\left\{\frac{1}{2}(b^2-a^2\varkappa_1)-A(a\varkappa_2-b\varkappa_3)\right\}\frac{\alpha_0}{\operatorname{sen}\alpha_0}-\right. \\ \qquad -\left(\frac{1}{2}b+A\varkappa_3\right)\frac{\pi b}{\operatorname{sen}\alpha_0}+(a\varkappa_1-\varkappa_2)a-(b-\varkappa_3)b+\left\{\frac{1}{2}(b^2-a^2\varkappa_1)+\right. \\ \qquad \left.\left.+B(a\varkappa_2-b\varkappa_3)\right\}\cos\alpha_0\right]=0 \end{cases}$$

le quali rendono risoluto il problema.

Cade finalmente opportuno chiarire in che modo convenga scegliere la posizione della sezione in cui fu ipotizzata la brusca variazione dello

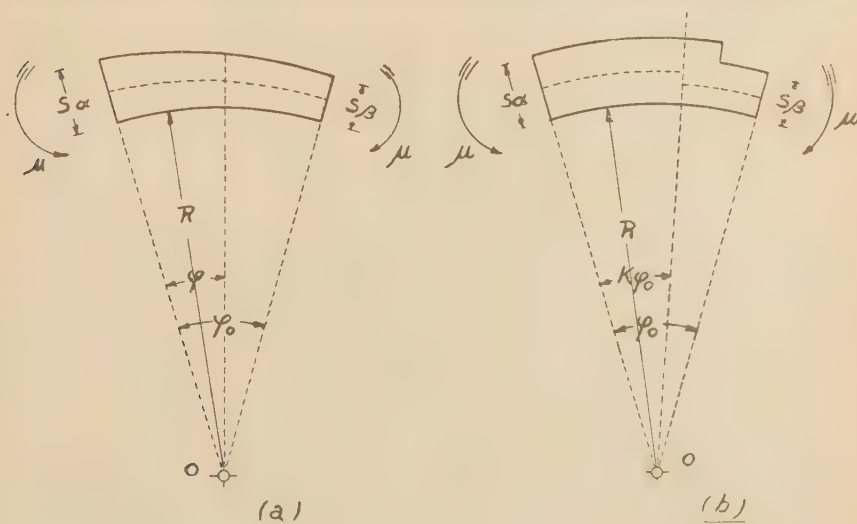



Fig. 3.

spessore: al tronco di parete avente spessore variabile (raccordo) sostituiremo un tronco di eguale lunghezza costituito di due parti di cui una di spessore costante ed eguale allo spessore di una delle falde e l'altra anch'essa di spessore costante e pari a quello dell'altra falda; le lunghezze delle due parti saranno però scelte in modo che il nuovo tronco, sottoposto all'azione di un certo momento flettente costante, presenti tra

le sezioni estreme la stessa rotazione che, sotto l'azione dello stesso momento costante, presenterebbe il tronco a spessore variabile.

Resta allora da determinare il rapporto λ fra le lunghezze di questi due tratti, e la condizione testè precisata, con riferimento alla fig. 3, risulta soddisfatta quando sia:

$$11) \qquad \frac{Ra}{\varepsilon s^3_\alpha} \lambda \varphi_0 + \frac{Rb}{s^3_\beta} (1 - \lambda) \varphi_0 \doteq \int_0^{\varphi_0} \frac{\rho d\varphi}{s^3_\varphi}$$

nello stabilire la quale conviene che il tronco di spessore maggiore, per uniformità con il rimanente dell'arco del quale costituisce il prolungamento, sia pensato anch'esso affetto da fori, donde ancora la presenza del fattore già precedentemente introdotto.

Per poter effettuare la quadratura a secondo membro della 11) è opportuno conferire a s ed a ρ delle espressioni sufficientemente semplici in funzione di φ: potremo ad esempio supporre che s vari lineamente con φ onde, con riferimento alla fig. 3 *a)*:

$$12) \qquad \begin{aligned} s_\varphi &= s_\alpha - (s_\alpha - s_\beta) \frac{\varphi}{\varphi_0} \\ \rho &= R + \frac{1}{2} \left[s_\alpha - (s_\alpha - s_\beta) \frac{\varphi}{\varphi_0} \right] \end{aligned}$$

Introducendo tali valori ed effettuata la quadratura si ricava dalla 11):

$$13) \qquad \lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \frac{b}{a} \left(\frac{s_\alpha}{s} \right) - \frac{b}{a} \left(\frac{s_\alpha}{s_\beta} \right)^2 - \frac{s_\alpha}{s_\beta}}{\frac{b}{a} \frac{s_\alpha}{s_\beta} - \frac{1}{\varepsilon}}$$

la quale fornisce il rapporto desiderato.

Impiegando il procedimento ora proposto si potrà, ai fini dei calcoli, sostituire alla sezione trasversale del recipiente una sezione fittizia come quella considerata in fig. 2, nella quale l'angolo α, abbracciante la metà della falda di maggior spessore è palesemente fornito dalla:

$$14) \qquad \alpha_0 = \alpha^* + \lambda \varphi_0 .$$

$2\alpha^*$ e φ_0 essendo gli angoli abbraccianti nella struttura reale rispettivamente la falda più spessa ed il raccordo, e nella quale φ_0, se ci riferiamo alla conformazione usualmente attribuita nella pratica al raccordo, sarà,

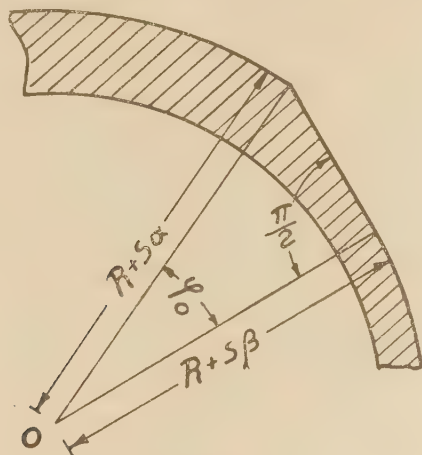



Fig. 4.

con riferimento alla fig. 4, a sua volta fornito dalla:

$$\varphi_0 = \text{arc cos} \frac{R + s_\beta}{R + s_\alpha} \tag{15}$$

Per quanto riguarda i giunti chiodati eventualmente presenti, i quali per necessità costruttive appaiono sempre intercalati nella falda di minor spessore, osserviamo infine che riesce facile, come fu accennato, tenerne conto; ed infatti la complicazione che si impone in tal caso è dovuta unicamente alla comparsa nell'espressione del lavoro di deformazione di un termine in più, e relativo al tronco lungo il quale si estende il giunto in questione. Questa complicazione, se così la si vuol chiamare, non ha però grande importanza dato che lo spessore ed il raggio medio di tale tronco sono indipendenti dall'arco.

A dare in qualche modo un'idea concreta dell'approssimazione raggiungibile attraverso l'esposto procedimento, non ci è possibile allo stato fare altro di meglio che determinare col suo ausilio i valori delle tensioni in un collettore appartenente ad una moderna caldaia marina, il cui esercizio non ha dato luogo ad inconvenienti di sorta.

Per il collettore su accennato, in base ai simboli già da noi adottati, si ha:

$$R = 250 \text{ mm}$$
$$s_\alpha = 32 \text{ mm}$$
$$s_\rho = 12 \text{ mm}$$
$$\alpha^* = 58^0$$
$$p = 25 \text{ Kg/cm}^2$$

Avendosi inoltre per i tubi e per i passi dei fori nella piastra tubiera:

$$d_e/d_i = 26{,}5/23 \text{ mm/mm}$$
$$t_1 = 74 \text{ mm}$$
$$t_2 = 50 \text{ mm}$$

si ottiene intanto da 7):

$$\varepsilon = 0{,}726$$

Si ha poi successivamente:

— dalle 1):

$$a = 1{,}064$$
$$b = 1{,}024$$

— dalla 15):

$$\varphi_0 = 21^0{,}45'$$

— e quindi dalle 13):

$$\lambda = 0{,}799$$

La 14) fornisce allora:

$$\alpha_0 = 75^0{,}25'$$

Avuto riguardo alla 4), dalle 6) si ha perciò:

$$\varkappa_1 = 0{,}0753$$
$$\varkappa_2 = 0{,}097 \times 10^{3}$$
$$\varkappa_3 = 0{,}018 \times 10^{2}$$

Sembrerebbe, esaminando i valori assunti nel caso all'esame da questi coefficienti, che $\varkappa_2$ e $\varkappa_3$, siano in generale trascurabili rispetto a $\varkappa_1$, ciò che rappresenterebbe la possibilità di tralasciare nel calcolo del lavoro di deformazione i contributi apportati dagli sforzi normale e di taglio. Questa semplificazione non è in linea generale consentita e rileviamo anzi che nel computo dei coefficienti che compaiono nelle 10) è necessario molto spesso spingere l'approssimazione numerica sino alla quarta ed anche alla quinta cifra decimale. Ed infatti, nell'ordine di grandezza delle più comuni dimensioni assegnate alla sezione trasversale di questi recipienti, se non si garantisce in siffatto modo l'approssimazione dei calcoli, si ottengono con grande facilità risultati manifestamente inaccettabili.

Tale precauzione è peraltro imposta (come in altri casi non infrequenti

e ben noti a chi ha pratica di calcoli applicativi) da cause di carattere puramente numerico e non è quindi da porsi a carico del procedimento, considerato nella sua parte sostanziale.

Introducendo intanto i valori innanzi calcolati nelle 10) si ricava, dopo aver posto $m = \frac{10}{3}$:

$$\mu = 0{,}0223\ pR^2$$
$$N = 0{,}989\ pR$$

e le 2) forniscono allora:

$$\begin{cases} M_\alpha = \ \ [0{,}0333 - 0{,}0109 \cos \alpha]\, pR^2 \\ N_\alpha = \ \ [1 - 0{,}0103 \cos \alpha]\, pR \\ T_\alpha = \ \ 0{,}0103 \ \operatorname{sen} \alpha \cdot pR \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_\beta = -[0{,}0067 + 0{,}0105 \cos \beta]\, pR^2 \\ N_\beta = \ \ [1 - 0{,}0103 \cos \beta]\, pR \\ T_\beta = \ \ 0{,}0103 \ \operatorname{sen} \beta \cdot pR \end{cases}$$

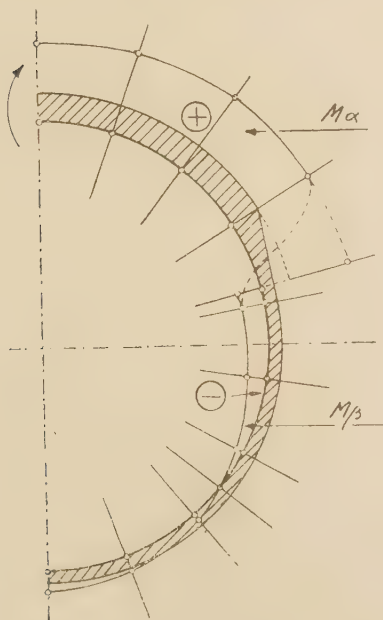



Fig. 5.

Sulla scorta di queste espressioni abbiamo tracciato i diagrammi di figg. 5 e 6 i quali rappresentano rispettivamente la distribuzione dei momenti flettenti lungo il profilo dell'arco e quella delle sollecitazioni circon-

ferenziali, esterne ed interne, dovute alla sovrapposta azione dello sforzo normale e del momento flettente.

Secondo la convenzione adottata in fig. 2, nel diagramma di fig. 5 compaiono segnati come positivi i momenti che tendono a diminuire la curvatura dell'arco ed in quelli di fig. 6 sono da intendersi positive (tra-

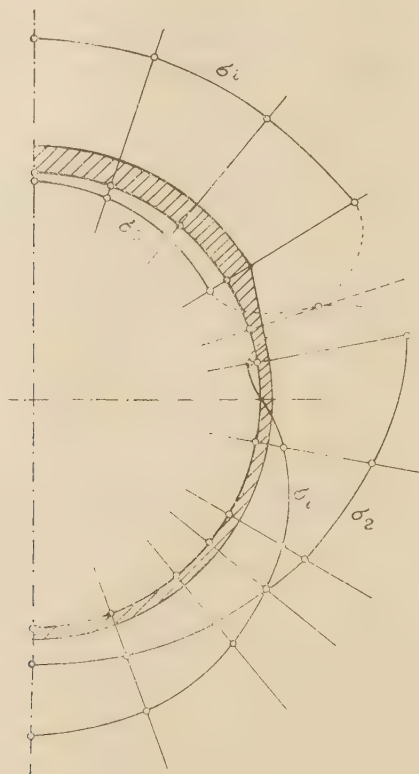



Fig. 6.

zioni) le ordinate disposte esternamente al profilo interno della struttura (la fondamentale). In entrambi i diagrammi le parti tracciate in linea piena sono quelle a cui conviene prestare maggior fede, giacchè le parti relative all'arco abbracciato dal raccordo, corrispondendo all'andamento fittizio della struttura assunto per i calcoli, sono state sostituite con altre a trattini che vogliono indicare il presumibile andamento dei diagrammi stessi lungo il raccordo profilato come in realtà.

Le parti a trattini rappresentano dunque andamenti semplicemente presumibili, ma appare verosimile (a giudicare da quanto mostra l'esperienza dei casi pratici) che, almeno per la foggia ordinariamente conferita al raccordo, non è in quest'ultimo che si verificano le sollecitazioni più

alte. Infatti le rotture che talvolta si verificano in questi recipienti hanno generalmente luogo in corrispondenza della falda meno spessa e precisamente là dove questa si collega al raccordo. Nella applicazione fattane ad un caso concreto, il procedimento quì indicato mostra un massimo del valore assoluto della sollecitazione proprio dove l'esperienza indica più frequenti le rotture, il valore di questo massimo essendo di $42{,}64\ p = 1060$ kg/cm², il che giustificherebbe il soddisfacente comportamento della struttura esaminata.

Questi fatti, come del resto ci eravamo proposti, vengono da noi riguardati quali prove dell'attendibilità dei risultati ai quali conduce l'applicazione del procedimento, e mostrano che, malgrado si sia lasciato fuori considerazione l'irrigidimento apportato dal fascio tubiero, le ipotesi semplificative introdotte appaiono accettabili.

Un ulteriore conforto è desumibile da qualche confronto, quantunque di carattere prevalentemente qualitativo, dei nostri risultati con quelli riassunti in una figura riportata dal prof. P. E. Brunelli a pag. 71 della sua « Resistenza Organica delle Caldaie a Vapore » (ed. Cooperativa Guf. Torino), in oggetto a taluni rilievi eseguiti sottoponendo a pressione idrostatica collettori del genere di quelli da noi considerati.

Tra ciò che si deduce dalla detta figura e ciò che rappresenta la nostra fig. 6 esistono in realtà delle discrepanze, ma queste sono più apparenti che sostanziali. Al contrario il fatto stesso che si riesce a spiegare tali discrepanze per la presenza, nel caso riportato dal prof. Brunelli, di un fascio tubiero e di giunti chiodati (il primo lasciato fuori considerazione nel procedimento, i secondi assenti del tutto nel caso concreto da noi esaminato), costituisce un elemento probativo di non scarso interesse.

Conclusioni. — Quantunque nel titolo del presente lavoro non si sia espressa l'ambizione di aver rintracciato un procedimento che permetta di proporzionare senza incertezze di sorta il discusso tipo di recipiente, è pur chiaro che tale procedimento si presta allo scopo eliminando praticamente, eccezion fatta per quella derivante dal fascio tubiero nel caso di collettori per caldaie a vapore, ogni causa d'incertezza. Ed il vantaggio di questo risultato si può giudicare tanto più cospicuo quanto più grande è la parte che tutti gli altri procedimenti abbandonano al senso empirico del progettista.

Per ciò che riguarda l'effetto del fascio tubiero si possono d'altronde ricavare utili indirizzi da quanto abbiamo avuto occasione di scrivere in merito nel lavoro citato alla nota [1]), ed al proposito non è anzi privo di interesse mettere in rilievo che il procedimento quì esposto si presta tra l'altro a precise deduzioni sull'effetto menzionato, in uno studio sperimentale che lo abbini all'uso dell'estensimetro.

FEDERICO MILLOSEVICH

Commemorazione letta dal socio corrispondente **Antonio Scherillo**

(Adunanza del dì 5 dicembre 1942 - XXI).

È assai triste per me che la prima volta in cui prendo la parola nelle riunioni di questa Accademia sia per commemorare il mio Maestro, il senatore Federico MILLOSEVICH, scomparso improvvisamente il 9 novembre scorso.

Con Federico MILLOSEVICH la mineralogia italiana ha perduto il suo più autorevole rappresentante ed uno dei suoi cultori più valenti e geniali. Il vuoto sarà ben difficilmente colmato! Profondamente buono, modesto, affabile, cittadino esemplare, patriotta fervente, si può ben dire che in lui le qualità dell'animo eguagliassero quelle della mente. La sua scomparsa ha destato vivissimo rammarico in tutti quanti lo conobbero, e chi, come me, ha avuto la fortuna e l'onore di essere suo discepolo — e siamo in molti — prova per la perdita di un tale maestro e della guida amorevole e impareggiabile un profondo dolore e un rimpianto infinito.

Federico MILLOSEVICH nacque a Venezia il 10 gennaio 1875, da famiglia originaria di Cattaro, città che egli doveva finalmente vedere ricongiunta alla Madre Patria, ma compì tutti i suoi studi a Roma, dove il padre, Elia, fu direttore dell'osservatorio astronomico del Collegio Romano, e a Roma appunto si laureò in scienze naturali sotto la guida di Giovanni STRUVER, l'illustre mineralogista tedesco che fu tanto benemerito per la rinascita degli studi mineralogici in Italia. Fu dal 1897 al 1903 assistente dello stesso STRUVER, poi dal 1903 al 1906 insegnante nelle scuole medie di Benevento e di Catania, finchè nel 1906 fu nominato, in seguito a concorso, professore di Mineralogia nell'Università di Sassari. Dal 1909 al 1915 insegnò mineralogia presso l'Istituto di Studi Superiori di Firenze, e dal 1915 in poi presso l'Università di Roma dove successe al suo Maestro STRÜVER.

Rappresentò tra i mineralogisti la tendenza naturalistica: ad ogni modo il campo delle sue ricerche è vastissimo perchè nei suoi lavori si è occupato di cristallografia, di mineralogia descrittiva, di giacimenti minerari, di geochimica, di minerogenesi, di petrografia, onde può ben dirsi che fu un mineralogista completo.

Sarebbe troppo lungo citare ad uno ad uno i suoi numerosi lavori; basterà ricordare i più importanti e i principali risultati delle sue ricerche. Tra i lavori di mineralogia sono da citare gli « Appunti di mineralogia sarda », una serie di note in cui sono descritti e illustrati molti minerali

FEDERICO MILLOSEVICH

Nato il dì 10 - 1 - 1875 Morto il dì 8 - 11 - 1942

delle miniere della Sardegna, dei quali continuò ad occuparsi in numerose altre note fino agli ultimi tempi, e « I 5000 Elbani del museo di Firenze », catalogo descrittivo, ma ricchissimo di osservazioni originarie, delle collezioni dei minerali dell' isola d' Elba conservate nel museo mineralogico di Firenze. Appunto tra i minerali dell' Elba scoprì una varietà di calcite notevolmente cobaltifera: la cobaltocalcite; era la prima volta che tale soluzione solida veniva osservata in natura. Scoprì un nuovo minerale, la paternoite, un borato idrato di magnesio del giacimento salifero di M. Sambuco, presso Calascibetta in Sicilia. È da menzionare lo studio della meteorite caduta a El Uegit nella Somalia, che egli riuscì ad assicurare al museo mineralogico di Roma e che è la maggiore tra quelle conservate nei musei italiani. Di particolare interesse per la minerogenesi e la geochimica sono gli studi sulla formazione della malachite e dell'azzurrite, che egli potè riprodurre artificialmente. Infine va ricordato che, in collaborazione con U. Alvisi, fu uno dei primi a studiare, fino dal 1901, il problema dell'utilizzazione della leucite per la fabbricazione dell' allume.

Ma il ramo delle scienze mineralogiche che forse coltivò con maggiore passione fu la petrografia, e non è senza ragione che negli ultimi anni di insegnamento si fece trasferire alla cattedra di petrografia. Studiò le rocce della Somalia raccolte dalla spedizione Bottego, rocce della Terra del Fuoco, del Dodecaneso, dell' isola del Giglio, dei vulcani Sabatini, della Tolfa dove scoprì rocce di tipo propilitico. Il suo maggior contributo in questo campo è però rappresentato dagli studi sulle rocce eruttive delle Sardegna settentrionale, che per molto tempo costituirono i lavori più esaurienti, insieme con quelli di Carlo Riva, sulle rocce eruttive sarde.

Il sogno del Nostro era però lo studio completo dei minerali dei vulcani del Lazio, che Giovanni Strüver aveva iniziato, ma non condotto a termine. Pubblicò qualche nota sull'argomento riguardante l'idrodolomite e la melilite dei proietti del Vulcano Laziale, ma ciò è ben poca cosa rispetto a quanto aveva in animo di fare e che contava di realizzare col suo trasferimento a Roma. Disgraziatamente, distratto da ben altri compiti, non potè neppur lui portare a termine il lavoro, che sarebbe riuscito paragonabile per interesse e importanza alla « Mineralogia Vesuviana » del suo amico e coetaneo Ferruccio Zambonini. È da augurarsi che qualche mineralogista italiano voglia riprendere e completare il lavoro, per il quale il materiale è già stato raccolto; e con ciò non soltanto si riempirebbe una lacuna, ma si renderebbe il miglior omaggio alla memoria di Federico Millosevich.

Il Nostro era stato da pochi mesi trasferito a Roma che l' Italia entrava nella prima guerra mondiale; ed Egli che univa alla passione per la ricerca scientifica un profondo intuito delle necessità dell' ora ed una conoscenza di uomini e cose rara in un uomo di scienza, comprendendo quale contributo avrebbero potuto portare le scienze mineralogiche in una guerra moderna, organizzò e diresse presso il Ministero delle Armi e Munizioni un centro di

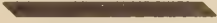
ricerca dei minerali utili all'industria bellica. Una piccola parte di questa attività è documentata nel lavoro « Giacimenti italiani di minerali accessori alla siderurgia », a cui hanno collaborato molti cultori di mineralogia e geologia.

Fascista della vigilia, dopo l'avvento del Governo Nazionale fu incaricato dell'Ispettorato Generale delle Miniere presso il Ministero dell'Economia Nazionale, e poi fu Rettore dell'Università. È a lui che si deve il primo progetto per la nuova Città Universitaria che egli voleva sorgesse non più nel centro della città a fianco all'antica Sapienza, ma alla periferia, nei pressi del Policlinico, in modo che l'angustia dello spazio non soffocasse i nuovi edifici; e l'Università riuscisse in tutto e per tutto degna dell'Urbe. Il progetto fu poi attuato con qualche modifica, pochi anni dopo, per volontà del Duce.

In riconoscimento dei suoi alti meriti, civili e scientifici, fu nominato nel 1928 senatore del Regno.

L'attività del Nostro andò sempre aumentando cogli anni, tanto che è lecito chiedersi se non sia stato l'eccessivo lavoro a causarne la fine prematura. Esplicò la sua attività a favore dei Ministeri delle Corporazioni, dell'Educazione Nazionale, dell'Africa Italiana e del Consiglio Nazionale delle Ricerche dove era presidente del Comitato Nazionale per la Geologia. Era consulente dell'Azienda Carboni Italiani, e, per desiderio del Duce, presidente dell'Azienda Mineraria Africa Orientale (A. M. A. O.). E non ho elencato tutti gli incarichi da lui tenuti; bisogna aggiungere che molti di questi li ebbe contemporaneamente, nè li considerò mai come una *sine cura*. Come presidente dell'A. M. A. O. non esitò, nonostante l'età avanzata, a recarsi due volte nell'Impero, anche nelle località più disagiate. Frutto di questi sopraluoghi è stata, tra l'altro, una nota sui giacimenti auriferi dell'Eritrea. E mi piace notare che non trascurò mai i suoi doveri di professore e di direttore di Istituto.

Quanto avesse a cuore le sorti del suo istituto lo dimostrò nel modo più evidente nel periodo in cui sorse alla Città Universitaria il nuovo istituto di mineralogia, che Egli procurò avesse un'ampiezza sufficiente per far fronte anche alle esigenze dell'avvenire e che volle largamente fornito di tutta l'attrezzatura necessaria alle ricerche più moderne, in modo da farne il primo tra gli istituti di mineralogia italiani. Curò pure che il museo mineralogico, il quale nella vecchia Sapienza aveva avuto una collocazione di ripiego, fosse sistemato in maniera da mettere in luce tutto il valore delle raccolte che ne fanno uno dei primi d'Europa e creò, e stava completando, la collezione delle miniere italiane e la raccolta petrografica.

Dell'efficacia della sua opera di maestro sono testimoni i numerosi allievi, molti dei quali hanno raggiunto la cattedra universitaria; del suo interessamento per la mineralogia italiana la fondazione del « Periodico di Mineralogia », che è l'unica rivista di questa scienza in Italia e che serve

a raccogliere la maggior parte della produzione mineralogica italiana, che prima andava dispersa.

In suo onore fu chiamato millosevichite un solfato idrato di ferro e alluminio dell'isola di Vulcano.

Fu socio di numerose accademie. Era tra l'altro dal 1938 socio ordinario della Società Reale, uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze, e socio dell'Accademia dei Lincei, della quale fu l'ultimo presidente. In seguito alla fusione di questa colla Reale Accademia d'Italia entrò a far parte del Consiglio Direttivo di quest'ultima. Tra le molte onorificenze di cui fu insignito ricordo la Stella d'oro al merito della scuola.

L'attività pubblica di Federico Millosevich non fu dunque meno vasta e feconda dell'attività scientifica, e anche da questa raccolse molti onori e soddisfazioni. Ma chi potè conoscerne a fondo l'animo sa che fu nella ricerca scientifica che egli cercò le sue più intime soddisfazioni, e che questa Egli amò sopratutto, dedicandovi le sue ore migliori, fino all'ultimo. Aveva in corso un lavoro sulle pozzolane della media valle dell'Aniene che Egli con un'ipotesi ardita e geniale sosteneva fossero il prodotto di eruzioni vulcaniche locali. Su questo argomento aveva tenuta una comunicazione preliminare al Primo Convegno della Società Mineralogica Italiana a Pavia nel 1941, e questo fu l'ultimo suo lavoro scientifico. Ma intorno alla questione aveva continuato a lavorare fino al giorno precedente la sua scomparsa, in cui era andato regolarmente — come sempre — all'Istituto, sebbene le sue condizioni di salute non fossero soddisfacenti.

Per quanto notevoli possano esserne le benemerenze nella vita pubblica, il ricordo di uno scienziato è affidato sopratutto alla sua produzione scientifica. È fatale che col tempo il ricordo delle prime impallidisca, mentre la fama che si acquista coll'attività scientifica, se è più difficile da conseguirsi e se, di solito, rimane più ristretta, è però assai più duratura. E per noi che ne lamentiamo la perdita è almeno motivo di consolazione e di conforto il pensiero che il nome di Federico Millosevich vivrà lungamente, anche dopo che saremo scomparsi noi che lo abbiamo conosciuto in vita.

Le lave attuali del Vesuvio. II): lave del novembre 1941 e del febbraio 1942

Nota del socio corrispondente prof. **Antonio Scherillo**

(Adunanza del dì 5 dicembre 1942 - XXI)

Sunto. — Le lave del Vesuvio dell' 11 novembre 1941 e del 27 febbraio 1942 sono vesuviti con una composizione chimica sostanzialmente identica. L' apparente differenziazione in senso melanocratico rispetto alle lave dell' autunno 1940 rientra nei limiti delle variazioni che si possono riscontrare nelle analisi chimiche di lave emesse anche nei medesimi giorni, come è mostrato da ulteriori ricerche sulle lave dell' autunno 1940.

Nella nota precedente a questa [1]) ho riportato l' analisi chimica di tre lave vesuviane dell' autunno 1940. Dalle tre analisi — assai concordanti — ho calcolato la composizione chimica media riportata nella colonna (I).

	I	II
SiO_2	47.73	47.87
TiO_2	0.36	0.40
ZrO_2	0.03	0.05
Al_2O_3	19.63	19.47
Fe_2O_3	2.64	2.95
FeO	5.90	5.88
MgO	3.41	3.98
CaO	8.39	8 54
BaO	0.25	0,24
K_2O	7.61	6.02
Na_2O	3,58	3.65
P_2O_5	0,67	0.67
SO_3	0.08	tr.
Cl	0.12	0.17
H_2O^-	0.26	0.03
H_2O^+		0.33
	100.66	100.25
$-O/Cl_2$	0.03	0.04
	100.63	100.21

[1]) Rendiconto della R. Acc. sc. fis. e mat., s. 4, vol. XII. Napoli, 1941-42 - XX.

si	117	117
al	28 $^1/_2$	28
fm	29	31 $^1/_2$
c	22	22 $^1/_2$
alc	20 $^1/_2$	18
k	0.58	0.52
mg	0.44	0.45
grado di silicizz.	0.64	0.68

Devo ora avvertire che questa non sembra rappresentare esattamente la composizione globale della lava vesuviana dell'autunno 1940. Infatti la analisi chimica di un campione medio ottenuto da diversi campioni di lave dello stesso periodo, mi ha dato la composizione riportata in (II). Il tipo chimico è sempre il medesimo, ma il potassio è sensibilmente più scarso: ciò che è dovuto senza dubbio a una complessiva minor abbondanza di leucite. È vero che la leucite è distribuita in apparenza in maniera uniforme in tutta la lava e che si trova sempre in proporzione di circa il 30 % in peso, ma la determinazione planimetrica non può fare apprezzare le variazioni piccole (come è nel nostro caso) nella composizione mineralogica quantitativa.

Tutto ciò dimostra ad ogni modo che nel trattare delle variazioni di chimismo di un magma bisogna procedere con grande cautela perchè le analisi chimiche eseguite su una medesima roccia eruttiva possono dare risultati diversi, sia pure leggermente.

Le lave che ora descrivo appartengono al medesimo intervallo eruttivo che si è iniziato alla fine dell'ottobre 1941: la lava III è stata emessa l'11 novembre 1940, la IV il 27 febbraio 1942.

Per aspetto e per composizione mineralogica non differiscono in nulla da quelle dell'autunno 1940, onde è superfluo darne la descrizione. La loro composizione chimica è pressochè identica e vicinissima a quella dell'analisi (II). Cosicchè, tenendo presente quanto si è detto sopra, possiamo concludere che finora nel magma vesuviano non sembra essersi determinata alcuna sensibile variazione.

	III	IV
SiO_2	48.00	47.96
TiO_2	0.38	0.40
ZrO_2	0.07	0.04
Al_2O_3	19.55	19.15
Fe_2O_3	2.79	3.08
FeO	5.67	5.64
MgO	1.03	4.37
CaO	8.46	9.04
BaO	0.22	0.18
K_2O	6.40	6.36
Na_2O	3.38	3.16
P_2O_5	0.58	0.48
SO_3	0.07	0.06
Cl	0 21	0.17
H_2O^-	—	—
H_2O^+	0.42	0.32
	100.23	100.41
— O/Cl_2	0.05	0.04
	100 18	100.37

	III	IV
si	118	116
al	28 1/2	27 1/2
fm	31 1/2	31 1/2
c	22	23 1/2
alc	18	17 1/2
k	0.55	0.56
mg	0.47	0.50
grado di silicizz.	0.68	0.69

Le equazioni lagrangiane della meccanica dei sistemi continui in coordinate generali.

Nota del prof. **Carlo Tolotti**, *presentata dal socio ord.* **A. Signorini**

(Adunanza del dì 7 novembre 1942 - XXI)

Sunto. — Viene scritta la forma lagrangiana delle equazioni fondamentali della meccanica dei sistemi continui intendendo assunto nello stato di riferimento un arbitrario sistema di coordinate curvilinee.

1. Sia S un generico sistema continuo in quiete o in moto rispetto alla terna cartesiana trirettangola T; C_* un suo arbitrario stato di riferimento; C lo stato di S all'istante generico t; P_* e P una qualunque coppia di punti corrispondenti in C_* e C; y_r ed x_r $(r = 1, 2, 3)$ le coordinate di P_* e P rispetto a T; k_* e k le densità di S in C_* e C; $\mathbf{F} k \, d\, C = \mathbf{F} k_* d\, C_*$ la forza di massa agente attualmente sulla particella generica di S; Σ_*, Σ i contorni completi di C_*, C ed $\mathbf{n}_*, \mathbf{n}$ i versori delle rispettive normali interne; $\mathbf{f} \, d\Sigma = \mathbf{f}_* \, d\Sigma_*$ la forza superficiale esterna agente attualmente sul generico elemento del contorno di S; X_{rs} $(r, s = 1, 2, 3;$ $X_{rs} = X_{sr})$ le ordinarie caratteristiche di tensione.

È noto [1]) che, indipendentemente da ogni speciale ipotesi sul corpo naturale schematizzato con S, sussistono le seguenti equazioni di tipo lagrangiano (cioè facenti figurare, accanto alla t, le y_r come variabili indipendenti):

l'equazione di continuità

$$k_* = k\, D, \tag{1}$$

ove D denota il determinante funzionale

$$D = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (y_1, y_2, y_3)}, \tag{2}$$

e le equazioni, traducenti in forma lagrangiana le equazioni dinamiche di Cauchy,

---

[1]) Cfr., ad es., A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria 1ª, « Annali di Matematica », 1943, Cap. II, § 1.

$$
(3) \quad \begin{cases} k_*\left(F_r - \dfrac{\partial^2 x_r}{\partial t^2}\right) = \sum_{ls}^{3} \dfrac{\partial}{\partial y_l}\left(D\, Y_{ls} \dfrac{\partial x_r}{\partial y_s}\right) \ldots\ldots C_*, t \\[2ex] f_r^* = D \sum_{ls}^{3} Y_{ls} \dfrac{\partial x_r}{\partial y_s} \cos \widehat{n_* y_l} \quad \ldots\ldots \Sigma_*, t \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3) ,
$$

con le Y legate alle X dalle relazioni [2])

$$
(4) \qquad X_{rs} = \sum_{lm}^{3} Y_{lm} \frac{\partial x_r}{\partial y_l} \frac{\partial x_s}{\partial y_m} \qquad (r, s = 1, 2, 3).
$$

Se, in particolare, S è un S_r, cioè un sistema a trasformazioni reversibili esente da ogni vincolo interno, sussistono anche le uguaglianze

$$
(5) \qquad Y_{rs} = -k \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{rs}} \qquad (r, s = 1, 2, 3) ,
$$

ove F denota il potenziale termodinamico, dipendente in genere da P_*, dalla temperatura nello stato attuale C e (in modo simmetrico rispetto ad r, s) dalle quantità

$$
(6) \qquad \varepsilon_{rs} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l}^{3} \frac{\partial x_l}{\partial y_r} \frac{\partial x_l}{\partial y_s} - \delta_{rs}\right) \qquad (r, s = 1, 2, 3)
$$

con $\delta_{rs} = 1$ se $r = s$ e $\delta_{rs} = 0$ se $r \neq s$.

Per mezzo di (1), (5), le equazioni (3) si riducono a tre equazioni alle derivate parziali del 2° ordine nelle x, non contenenti alcun altra incognita se le trasformazioni di S sono soggette al vincolo di isotermia o di isoentropia.

Oggetto della presente Nota è la generalizzazione delle equazioni lagrangiane (3) al caso che C_* sia riferito ad un arbitrario sistema di coordinate curvilinee. Con essa credo di aver apportato un utile completamento alle precedenti esposizioni dei primi elementi della teoria delle

---

[2]) Nella sua Memoria citata in [1]) il SIGNORINI denota invece con Y_{lm} le quantità che, con i simboli da me qui usati, sono espresse da DY_{lm}.

trasformazioni termoelastiche finite in coordinate generali [3]), ove trovasi invece considerato sopratutto il punto di vista euleriano.

2. Pur rimandando il lettore per l'uso del calcolo differenziale assoluto ai trattati specifici sull'argomento [4]), ho ritenuto utile premettere qui quelle formule che verranno usate correntemente nel corso della Nota.

Richiamo anzitutto la legge di trasformazione di un generico tensore misto $A_{r_1 r_2 \dots r_p}^{s_1 s_2 \dots s_q}$ *p-plo* covariante e *q-plo* contravariante, ad elementi funzioni delle coordinate $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ del generico punto P dello spazio astratto V_3, per effetto di un'arbitraria trasformazione di coordinate

$$\alpha_r = \alpha_r \, (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3) \qquad (r = 1, 2, 3)$$

in V_3. Precisamente, contraddistinguendo con un soprassegno le nuove componenti del tensore, detta legge di trasformazione è

$$(7) \qquad \overline{A}_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q} = \sum_{l_1 \dots l_p m_1 \dots m_q}^{3} A_{l_1 \dots l_p}^{m_1 \dots m_q} \frac{\partial \alpha_{l_1}}{\partial \overline{\alpha}_{r_1}} \dots \frac{\partial \alpha_{l_p}}{\partial \overline{\alpha}_{r_p}} \frac{\partial \overline{\alpha}_{s_1}}{\partial \alpha_{m_1}} \dots \frac{\partial \overline{\alpha}_{s_q}}{\partial \alpha_{m_q}}$$

Si supponga ora stabilita in V_3 una determinazione metrica e sia

$$dP^2 = \sum_{rs}^{3} a_{rs} \, d\alpha_r \, d\alpha_s$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, a^{rs} l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante $\| a_{rs} \|$.

Diconsi tensori associati del tensore $A_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q}$, rispetto alla metrica considerata, tutti i tensori che da esso si ottengono portando uno o più

---

[3]) Cfr. L. BRILLOUIN, *Les lois de l'Elasticité en coordonnées quelconques*, « Proc. of the Inter. Math. Congress held in Toronto », 1924, vol. II, pagg. 73-97; T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, Zanichelli, 1928, pagg. 63-69; F. D. MURNAGHAN, *Finite deformations of an elastic solid*, « Amer. Jour. of Math. », vol. 59, 1937, pagg. 235-260; U. CISOTTI, *Meccanica razionale*, Milano, Libreria edit. politecnica, 1942, pagg. 374-383.

[4]) Cfr., ad es., T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925.

dei suoi indici dall'alto in basso o viceversa, mediante composizione con il tensore covariante a_{rs} o con il tensore contravariante a^{rs}. Tali tensori associati si usano continuare ad indicare con la stessa lettera, cosicchè ad es.

$$A_{r_1 \dots r_p s_1}^{s_2 \dots s_q} = \sum_{l}^{3} a_{ls_1} A_{r_1 \dots r_p}^{l s_2 \dots s_q} . \tag{8}$$

Esempi di tensori associati (di rango uno) sono le componenti covarianti v_r e contravarianti v^r di un generico vettore **v** di V_3. Sul significato geometrico di tali componenti ricorderò che $\frac{v_r}{\sqrt{a_{rr}}}$ è la proiezione di **v** sulla direzione della linea coordinata r^{ma} passante per il punto di applicazione di **v** e che $\frac{v^r}{\sqrt{a^{rr}}}$ è l'analoga proiezione sulla direzione della normale alla superficie coordinata $\alpha_r =$ cost. in detto punto.

Introdotti i simboli di CHRISTOFFEL di 1ª e di 2ª specie relativi ai coefficienti a_{rs}

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{l,rs} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{lr}}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial a_{ls}}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial \alpha_l}\right) \\ \Gamma^{l}_{rs} &= \sum_{m}^{3} a^{lm} \Gamma_{m,rs} , \end{aligned} \right. \tag{9}$$

si consideri ora il sistema misto

$$\begin{aligned} \nabla_l A_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q} = \frac{\partial A_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q}}{\partial \alpha_l} &- \sum_{i}^{p} \sum_{j}^{3} A_{r_1 \dots r_{i-1} j r_{i+1} \dots r_p}^{s_1 \dots s_q} \Gamma^{j}_{r_i l} + \\ &+ \sum_{i}^{q} \sum_{j}^{3} A_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_{i-1} j s_{i+1} \dots s_q} \Gamma^{s_i}_{j l} \end{aligned} \tag{10}$$

È un risultato fondamentale del calcolo differenziale assoluto che tale sistema misto costituisce un tensore $p+1-plo$ covariante e $q-plo$ contravariante. Ad esso si dà il nome di derivata covariante del tensore $A_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q}$ nella metrica considerata.

Ricorderò infine l'espressione della divergenza di un generico vettore **v** di V_3

$$\text{div}\ \mathbf{v} = \sum_{1}^{3} {}_r \nabla_r v^r = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{3} {}_r \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{a}\, v^r) \tag{11}$$

con $a = | a_{rs} |$, e che analogamente si dà il nome di divergenza del tensore doppio A^{rs} al vettore le cui componenti contravarianti sono espresse da

$$\sum_{1}^{3} {}_s \nabla_s A^{rs} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{3} {}_s \frac{\partial}{\partial \alpha_s} (\sqrt{a}\ A^{rs}) + \sum_{1}^{3} {}_{ls} A^{ls} \Gamma^r_{ls} \qquad (r = 1, 2, 3)\ . \tag{12}$$

3. Ritornando al problema specifico in esame, siano $\overline{y}_r$ $(r=1,2,3)$ le coordinate di P_* rispetto ad un generico sistema di coordinate curvilinee stabilito in C_*. La relativa espressione del quadrato dell' elemento lineare è

$$d P^2_* = \sum_{1}^{3} {}_{rs} a^*_{rs} d \overline{y}_r d \overline{y}_s\ , \tag{13}$$

con

$$a^*_{rs} = \sum_{1}^{3} {}_l \frac{\partial y_l}{\partial \overline{y}_r} \frac{\partial y_l}{\partial \overline{y}_s}\ . \tag{14}$$

In virtù della corrispondenza biunivoca che, ad ogni istante, sussiste tra C_* e C se il moto di S è, come supporremo, regolare, si potranno considerare le $\overline{y}_r$ anche come coordinate curvilinee di P in C e la relativa espressione del quadrato dell' elemento lineare sarà:

$$dP^2 = \sum_{1}^{3} {}_{rs} \overline{a}_{rs} d\overline{y}_r\ d\overline{y}_s\ , \tag{15}$$

con

$$\overline{a}_{rs} = \sum_{1}^{3} {}_l \frac{\partial x_l}{\partial \overline{y}_r} \frac{\partial x_l}{\partial \overline{y}_s}\ . \tag{16}$$

Sia inoltre

$$\Phi = \sum_{1}^{3} {}_{rs} \overline{Y}^{rs}\ \overline{\xi}_r\ \overline{\eta}_s \tag{17}$$

la forma bilineare invariante che rappresenta [5]) la componente, secondo il versore ξ (od η), dello sforzo specifico che si esercita in P sulla faccia dell' elemento di superficie normale al versore η (o ξ) situata dalla parte opposta di quella indicata da tale versore; $\bar{\xi}_r$ ed $\bar{\eta}_r$ le componenti covarianti dei versori ξ ed η quando si intenda C riferito alle coordinate curvilinee $\bar{y}_r$.

Stante il carattere invariantivo delle forme quadratiche (13), (15) e della forma bilineare (17), le a^*_{rs}, $\bar{a}_{rs}$ ed

$$\bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{rs} - a^*_{rs}) \tag{18}$$

costituiscono altrettanti tensori doppi covarianti simmetrici, mentre le $\bar{Y}^{rs}$ costituiscono un tensore doppio simmetrico contravariante. Al tensore $\bar{\varepsilon}_{rs}$ si suole dare il nome di *tensore di deformazione*, inerente lo spostamento $C_* \rightarrow C$, ed al tensore $\bar{Y}^{rs}$ quello di *tensore degli sforzi*.

Se, in particolare, le $\bar{y}_r$ si identificano colle y_r, le $\bar{\varepsilon}_{rs}$ ed $\bar{Y}^{rs}$ si riducono alle ε_{rs} ed Y_{rs} del n. 1, mentre, se le $\bar{y}_r$ si identificano in C colle x_r, le $\bar{Y}^{rs}$ si riducono alle ordinarie componenti X_{rs}.

Circa il significato cinematico delle $\bar{\varepsilon}_{rs}$, mi limiterò ad osservare che esso segue immediatamente da (18) e da quello geometrico (ben noto) dei coefficienti delle due forme metriche (13), (15). Per le $\bar{Y}^{rs}$ si osservi invece che, identificando ξ ed η colle determinazioni in P di $-$ vers grad$_P\, \bar{y}_r$ e $-$ vers grad$_P\, \bar{y}_s$, la (17) dice che $\dfrac{\bar{Y}^{rs}}{\sqrt{\bar{a}^{rr}}\sqrt{\bar{a}^{ss}}}$ è la componente, secondo la normale in P alla superficie coordinata $\bar{y}_r =$ cost. (od $\bar{y}_s =$ cost) orientata nel verso di decrescenza delle $\bar{y}_r$ (od $\bar{y}_s$), dello sforzo specifico agente sulla faccia dell' elemento di superficie $\bar{y}_s =$ cost. (od $\bar{y}_r =$ cost) situata dalla parte ove le $\bar{y}_s$ (od $\bar{y}_r$) sono maggiori.

4. Dalla nota relazione

$$\frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)} = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (y_1, y_2, y_3)} \cdot \frac{\partial (y_1, y_2, y_3)}{\partial (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)}$$

si ha, indicando con a_* ed $\bar{a}$ i valori dei determinanti $| a^*_{rs} |$ ed $| \bar{a}_{rs} |$,

$$\sqrt{\bar{a}} = D \sqrt{a_*}. \tag{19}$$

---

[5]) Cfr., ad es., T. Levi-Civita, op. cit. [3]), p. 65.

Pertanto l'equazione lagrangiana di continuità (1) si scrive, quando si intende C_* riferito alle coordinate curvilinee $\overline{y}_r$,

$$k\sqrt{\overline{a}} = k_* \sqrt{a_*} . \tag{20}$$

Affermo inoltre che, nel passaggio dalle y_r alle $\overline{y}_r$, le equazioni (3) si trasformano in

$$\left\{\begin{array}{ll} k_* \sqrt{a_*}\left(F_r - \dfrac{\partial^2 x_r}{\partial t^2}\right) = \sum_{ls}^{3} \dfrac{\partial}{\partial \overline{y}_l}\left(\sqrt{\overline{a}}\ \overline{Y}^{ls} \dfrac{\partial x_r}{\partial \overline{y}_s}\right) \ldots\ldots C_*, t & \\ & (r=1,2,3), \\ \sqrt{a_*}\, f^*_r = \sqrt{\overline{a}} \sum_{ls}^{3} \overline{Y}^{ls} \dfrac{\partial x_r}{\partial \overline{y}_s} \overline{n}^*_l \qquad \ldots\ldots \Sigma_*, t & \end{array}\right. \tag{21}$$

ove le $\overline{n}_l^*$ denotano le componenti covarianti di $\mathbf{n}_*$ nel riferimento curvilineo scelto.

Ciò è difatti immediata conseguenza del carattere di covarianza rispetto all'indice s delle $\dfrac{\partial x_r}{\partial \overline{y}_s}$, di quello di doppia contravarianza delle $\overline{Y}^{rs}$, nonchè del fatto che, stante (11), il 2° membro della prima delle (21), diviso per $\sqrt{a_*}$, non è che la divergenza, in C_*, del vettore avente per componenti contravarianti

$$D \sum_{s}^{3} \overline{Y}^{ls} \frac{\partial x_r}{\partial \overline{y}_s} \qquad (l = 1, 2, 3) .$$

Se poi, in particolare, il sistema continuo S è un S_r, si ha dalle (5)

$$\sqrt{\overline{a}}\ \overline{Y}^{rs} = -k_* \sqrt{a_*} \frac{\partial F}{\partial \overline{\varepsilon}_{rs}} \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{22}$$

colle $\overline{\varepsilon}_{rs}$ espresse da (18), (14), (16) E, per mezzo di (22), le (21) si riducono a tre equazioni alle derivate parziali del 2° ordine nelle x_r considerate come funzioni delle $\overline{y}_r$ e di t.

5. Anzichè mediante le coordinate x_r di P, il moto di S si può pensare individuato dalle componenti dello spostamento locale P_*P. Denoteremo precisamente con u_r le componenti di P_*P rispetto alla terna cartesiana T e con $\overline{u}_r^*$, $\overline{u}_*^r$ le componenti covarianti e contravarianti di P_*P nel riferimento curvilineo costituito dalle $\overline{y}_r$ in C_*.

Essendo

$$x_r = y_r + u_r \qquad (r = 1, 2, 3),$$

è immediato trarre dalle equazioni del n. 4 quelle relative alle nuove funzioni incognite u_r di $\overline{y}_r$ e t.

Volendo invece mettere in evidenza le $\overline{u}^*_r$ ed $\overline{u}_*^r$, le quali sono mutuamente legate (n. 2) dalla relazione

$$(23) \qquad \overline{u}^*_r = \sum_1^3{}_s \, a^*_{rs} \, \overline{u}_*^s ,$$

le equazioni (3) si scrivono (come subito passerò a verificare):

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & k_* \left(\overline{F}_*^r - \frac{\partial^2 \overline{u}_*^r}{\partial t^2} \right) = \sum_1^3{}_s \, \nabla^*_s \, \overline{Z}^{rs} \qquad \ldots\ldots \; C_*, t \qquad (r = 1, 2, 3) \\ & \overline{f}_*^r = \sum_1^3{}_s \, \overline{Z}^{rs} \, \overline{n}^*_s \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; \Sigma_*, t \end{aligned} \right.$$

con $\overline{F}_*^r$, $\overline{f}_*^r$ componenti contravarianti dei vettori **F**, $\mathbf{f}_*$ nel riferimento costituito dalle $\overline{y}_r$ in C_*, $\overline{Z}^{rs}$ tensore espresso da

$$(25) \qquad \overline{Z}^{rs} = \frac{\sqrt{\overline{a}}}{\sqrt{a_*}} \left(\overline{Y}^{rs} + \sum_1^3{}_l \, \overline{Y}^{ls} \, \nabla^*_l \, \overline{u}^r_* \right)$$

e ∇^* simbolo di derivazione covariante nella metrica (13).

Inoltre se S è un S_r si può eliminare da (25) le $\overline{Y}^{rs}$ per mezzo di (22) e, tenendo presente che (come ora dimostrerò) le $\overline{\varepsilon}_{rs}$ sono espresse anche da

$$(26) \qquad \overline{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} \left(\nabla^*_s \, \overline{u}^*_r + \nabla^*_r \, \overline{u}^*_s \right) + \frac{1}{2} \sum_1^3{}_l \, \nabla^*_r \, \overline{u}^*_l \, \nabla^*_s \, \overline{u}^l_* .$$

le (24) si riducono così a tre equazioni alle derivate parziali nelle incognite $\overline{u}^r_*$, considerate come funzioni delle $\overline{y}_r$ e di t.

La dimostrazione di (24) e (26) si consegue facilmente in base al carattere tensoriale delle relazioni stesse ed al fatto che, quando le $\overline{y}_r$ si identificano colle y_r, la derivazione covariante viene a coincidere colla derivazione ordinaria, le componenti covarianti $\overline{u}^*_r$ e contravarianti $\overline{u}^r_*$

di $P_* P$ si riducono alle componenti cartesiane u_r e le (24), (26) si identificano pertanto con (3) e (6).

Per facilitare l'applicazione a casi concreti delle (24), (25), (26), scriverò qui esplicitamente le espressioni di $\nabla_s^* \overline{u}_r^*$, $\nabla_s^* \overline{u^r}_*$ e della divergenza di $\overline{Z}^{rs}$ che si traggono da (10) e (12). Precisamente, contrassegnando con un asterisco i simboli di Christoffel costituiti colle a^*_{rs}, è

$$\nabla_s^* \overline{u}_r^* = \frac{\partial \overline{u}_r^*}{\partial \overline{y}_s} - \sum_l^{1 \ldots 3} \overline{u}_l^* \Gamma_{rs}^{*l} \quad ,$$

$$\nabla_s^* \overline{u}_*^r = \frac{\partial \overline{u^r}_*}{\partial \overline{y}_s} + \sum_l^{1 \ldots 3} \overline{u^l}_* \Gamma_{ls}^{*r} \quad ,$$

$$\sum_s^{1 \ldots 3} \nabla_s^* \overline{Z}^{rs} = \frac{1}{\sqrt{\overline{a}_*}} \sum_s^{1 \ldots 3} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_s} \left(\sqrt{\overline{a}_*}\, \overline{Z}^{rs}\right) + \sum_{ls}^{1 \ldots 3} \overline{Z}^{ls} \Gamma_{ls}^{*r}$$

Ed osserverò qui infine che, se le coordinate curvilinee $\overline{y}_r$ sono ortogonali, cioè se

$$a^*_{rs} = 0 \qquad \text{per} \qquad r \neq s \quad ,$$

posto

$$a^*_{rr} = H_r^2 \qquad (r = 1, 2, 3),$$

i simboli Γ_{rs}^{*l} risultano semplicemente espressi da

$$\Gamma_{rs}^{*l} = 0 \qquad \text{per} \quad l \neq r \quad , \quad l \neq s \quad , \quad r \neq s$$

$$\Gamma_{rr}^{*l} = -\frac{H_r}{H_l^2} \frac{\partial H_r}{\partial \overline{y}_l} \qquad \text{per} \quad l \neq r \quad ,$$

$$\Gamma_{rl}^{*l} = \frac{1}{H_l} \frac{\partial H_l}{\partial \overline{y}_r} \qquad \text{per} \quad l \neq r \text{ e per } l = r .$$

Caratteri delle diverse serie canoniche delle curve algebriche e serie residue relative.

Nota del prof. **Federico Amodeo**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 6 febbraio 1943 - XXI)

Sunto. — Si fa vedere che i caratteri delle successive $(k-1)$ serie canoniche delle curve k-gonali sono armoniosamente collegati fra loro in modo che dai caratteri della $(k-1)$esima, dapprima ignoti, si determinano quelli delle precedenti fino a ritrovare quelli notissimi della prima serie canonica. Questi caratteri, facili a determinarsi soltanto per le curve *k-gonali regolari* (per le quali i valori delle sovrabbondanze dei sistemi delle curve aggiunte sono tutti nulli), riescono complicati per le curve singolari per la necessità di dover determinare il valore di ρ per ogni serie canonica. Qui sono dapprima determinati per le curve *tipiche* di *specie s*, dopo aver assegnati i relativi valori di ρ_α. Si completa il teorema di Riemann-Roch, estendendolo per le curve regolari alle serie residue fra due qualunque serie canoniche, e si perviene così a trovare la dimensione della serie residua della $(\alpha+1)$*esima* serie canonica rispetto alla α *esima*. Indi si perviene con nuova dimostrazione alla determinazione della dimensione della serie completa che comprende la serie segata sulle dette curve tipiche di specie s dalle rette del piano, da cui è derivato che tutte le curve di *1ª specie tipiche* sono curve normali del piano.

Per le curve *atipiche di specie s* si riconferma e perfeziona il valore di ρ_α che si era dato fin dal 1900 e si perviene a dimostrare che anche le curve *atipiche di 1ª specie* sono curve normali del piano. Si enunciano teoremi riguardanti le serie segate dalle curve del piano di ordine 2, 3, 4 ... e si assegnano le sovrabbondanze delle serie canoniche delle curve trigonali, tetragonali, ecc.

§ 1. *Caratteri per le curve regolari.*

1. Fin dal 1893 abbiamo intraveduto il vantaggio e la necessità di considerare le serie che sono segate sulle curve algebriche dai diversi sistemi di curve aggiunte, di ordini $m-4$, $m-5$, $m-6$, ..., $m-k-1$, e le abbiamo chiamate, per semplificare il linguaggio, 2ª, 3ª, 4ª, ... $(k-1)$ esima serie canonica. Cosicchè le curve algebriche di *gonalità* k hanno sempre $k-1$ serie canoniche, tutte speciali (anzi ognuna più specializzata della precedente). La più semplice fra tutte è la $(k-1)$esima (l'ultima), quella che è segata dalle *curve aggiunte minime*, che hanno l'ordine

$$m-3-(k-2)=m-k-1 \quad .$$

I caratteri di queste serie speciali, l'*ordine* e la *dimensione*, sono per le successive serie canoniche così armoniosamente legati e dipendenti fra loro che val la pena di vederli elencati nella loro successione e serbarne ricordo per quando occorrerà applicarli.

Cominciamo, come sempre abbiamo trovato utile di fare nelle precedenti ricerche, dalle *curve regolari* e poi passeremo alle *curve singolari*.

2. Il genere delle curve ${}_kC_p^m$ regolari, di ordine m, di genere p, di gonalità k è, come sappiamo,

$$p = \frac{k-1}{2}\,(2m-k-2)-\theta \qquad\qquad (\text{con } \theta \geq 0)$$

e per esse i diversi numeri ρ_α delle curve aggiunte sono tutti eguali a zero.

Sappiamo pure, fin dal 1893, che per queste curve l'ultima serie canonica, la $(k-1)$esima, che corrisponde ad $\alpha = k-2$, ha i seguenti caratteri:

$$N_{k-2} = km - k\,(k+1) - 2\,\theta\,;$$

$$R_{k-2} = m - k - 1 - \theta.$$

3. Si deduce da questi che i caratteri della serie canonica $(k-2)$esima sono:

$$N_{k-3} = N_{k-2} + m = (k+1)\,m - k\,(k+1) - 2\,\theta\,;$$

$$R_{k-3} = \frac{N_{k-3}}{2} - \delta_{k-2} = \frac{(k+1)(m-k)}{2} - \theta - \frac{k-3}{2}\,(m-k)$$

$$= 2\,(m-k) - \theta$$

per essere $\rho_{k-3} = 0$.

4. In modo analogo si ricava che la serie canonica $(k-3)$esima ha per caratteri:

$$N_{k-4} = (k+2)\,m - k\,(k+1) - 2\,\theta\,;$$

$$R_{k-4} = \frac{N_{k-4}}{2} - \delta_{k-4} = 3(m-k)+2-\theta.$$

5. Egualmente si trova che i caratteri della $(k-4)$esima serie canonica sono:

$$N_{k-5} = (k+3)\,m - k\,(k+1) + 2\theta\,;$$

$$R_{k-5} = 4\,(m-k) + 5 - \theta.$$

6. In generale i caratteri della $k-(i-1)$esima serie canonica (per $i \leq k$) sono:

$$N_{k-i} = (k+i-2) - k(k+1) - 2\theta;$$
$$R_{k-i} = (i-1)(m-k) + \frac{i(i-3)}{2} - \theta.$$

7. Cosicchè i caratteri della prima serie canonica, quella segata dalla C^{m-3} agg., debbono essere:

$$N_{k-k} = N_0 = (k+k-2)m - k(k+1) - 2\theta = 2(k-1)m - k(k+1) - 2\theta$$
$$= (k-1)(2m-k-2) - 2\theta - 2 = 2p-2;$$

$$R_{k-k} = R_0 = (k-1)(m-k) + \frac{k(k-3)}{2} - \theta = \frac{k-1}{2}\,2m - \frac{2k(k-1)+k(k-3)}{2} - \theta$$
$$= \frac{k-1}{2}(2m-k) - \frac{2(k-1)}{2} - \theta - 1 = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) - \theta - 1$$
$$= p-1,$$

come d' altronde era noto. Ma l' averli dedotti da quelli dell' ultima è un utile controllo della bontà delle formole trovate.

§ 2. *Caratteri per le curve singolari tipiche di specie* s.

8. Il genere delle curve ${}_kC_p^m$ *singolari* è sempre dato, come per le curve regolari, da

$$p = \frac{k-1}{2}(2m-k-2) - \theta .$$

La diversità sta in ciò, che per i sistemi di curve aggiunte in questo caso occorre determinare volta per volta i valori dei numeri ρ_α, cioè delle sovrabbondanze dei diversi sistemi di curve aggiunte, i quali non sono tutti eguali a zero.

Gli ordini delle diverse serie canoniche, essendo indipendenti dai valori di ρ_α, sono gli stessi delle curve regolari:

$$N_{k-2} = km - k(k+1) - 2\theta$$
$$N_{k-3} = (k+1)m - k(k+1) - 2\theta$$
$$N_{k-4} = (k+2)m - k(k+1) - 2\theta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_{k-i} = (k+i-2)m - k(k+1) - 2\theta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_0 = 2p-2.$$

Le dimensioni invece, aumentate tutte del valore di ρ_α, sono:

$$R_{k-2} = m - k - 1 - \theta + \rho_{k-2}$$
$$R_{k-3} = 2(m-k) \quad - \theta + \rho_{k-3}$$
$$R_{k-4} = 3(m-k)+2-\theta + \rho_{k-4}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{k-i} = (i-1)(m-k) + \frac{i(i-3)}{2} - \theta + \rho_{k-i}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_0 = p - 1.$$

Queste formole non sono utili fino a che non si possa precisare il singolo valore di ρ_α nei diversi casi particolari.

9. Per le curve *singolari tipiche di specie* s i valori dei numeri ρ_α sono stati già precedentemente determinati; prima per $s=2$, poi per $s>2$, con metodi diversi e stentatamente [1]), poi in generale per le curve tipiche di specie s con dimostrazione unica e diretta [2]), perciò val la pena di accennare qui brevemente come ci si possa pervenire con semplice dimostrazione sia per le curve *tipiche* che per le curve *atipiche*.

Le curve agg. $C^{m-3-\alpha}$ delle curve ${}_kC^m_p$ avendo nel punto V^{m-k} delle curve C' [3]), trasformate di ${}_kC^m_p$, un punto $(m-k-1)$uplo, per non spezzarsi, debbono avere sopra ogni retta uscente da V al più

$$(m-3-\alpha) - (m-k-1) = k-2-\alpha$$

punti; se ne hanno uno dippiù, cioè almeno $k-1-\alpha$, la curva $C^{m-3-\alpha}$ si spezza nella retta stessa e in un'altra curva di ordine minore, che passa per i rimanenti punti multipli. Ogni altro passaggio della stessa $C^{m-3-\alpha}$ agg. per un punto della retta uscente da V è condizione dipendente linearmente dalle rimanenti e contribuisce a formare la sovrabbondanza del numero ρ_α del sistema delle $C^{m-3-\alpha}$ aggiunte. Ciò si avvera in particolare quando la retta passa per qualche punto multiplo della curva C'.

Supponiamo per ora che la retta passi per un punto P k-uplo. Questo punto P presenta alla curva agg. $C^{m-3-\alpha}$ tanti passaggi in più di quelli che occorrono perchè la retta VP si stacchi quanti ne rappresenta la differenza

$$(k-1) - (k-1-\alpha) = \alpha\ ;$$

[1]) Amodeo, *Curve k-gonali* (Ann. di Mat. 21, 1893, 231-236); *Curve k-gonali di 1ª e 2ª specie* (Ann. di Mat. 24, 1895, 1-22); *Curve k-gonali di s^{esima} specie s* (Atti di questa Acc. Napoli, 1897).

[2]) Amodeo, *Contributo alla determinazione delle sovrabbondanze dei sistemi di curve agg. alle curve algebriche*, n. 4 (Rend. di questa Acc. Napoli Dic. 1900).

[3]) Amodeo, *Alcune applicazioni*... (questi Rend. giugno 1942, n. 2, c).

cosicchè: *il punto P k-uplo funziona per la $C^{m-3-\alpha}$ agg. come se la curva $C^{m-3-\alpha}$ avesse in P un punto α-uplo dipendente linearmente dai rimanenti. E quindi rappresenta per esse*

$$\frac{1}{2}\,\alpha(\alpha+1)$$

condizioni lineari dipendenti dalle rimanenti.

Così: per le C^{m-3} agg. ogni punto k-uplo rappresenta zero condizioni di dipendenza; per le C^{m-4} agg. rappresenta una sola condizione di dipendenza; per la C^{m-5} agg. rappresenta 3 condizioni lineari dipendenti; per la C^{m-6} ne rappresenta 6; e così di seguito.

10. Se invece il punto P è j-uplo $(2 \leq j < k)$, esso deve essere $(j-1)$uplo per le $C^{m-3-\alpha}$ agg. e rappresenta per esse tanti passaggi in più di quelli che occorrono perchè la retta VP si stacchi, quanti ne rappresenta la differenza

$$(j-1)-(k-1-\alpha)=\alpha+j-k$$

dove α varia da 0 a $k-2$.

Perciò, per le C^{m-k-1} i punti doppi,
per le C^{m-k} i punti tripli,
per le C^{m-k+1} i punti quadrupli,

rappresentano zero condizioni di dipendenza; e si può enunciare:

Ogni punto j-uplo $(2 \leq j \leq k)$ *funziona per le $C^{m-3-\alpha}$ agg. come punto* $(\alpha+j-k)$*uplo dipendente dagli altri e quindi rappresenta*

$$\frac{1}{2}\,(\alpha+j-k)(\alpha+j+1-k)$$

condizioni lineari dipendenti dalle rimanenti. [4])

Affinchè il punto j-uplo rappresenti condizioni dipendenti per la $C^{m-3-\alpha}$ aggiunte deve essere $\alpha+j-k>0$, *cioè*

$$j>k-\alpha\ .$$

11. Applichiamo questi risultati alle *curve tipiche di specie* s $\left(\text{per le quali } \theta=\frac{k(k-1)}{2}(s-1)\right)$. Essendo $s-1$ il numero dei punti k-upli che la curva C' può avere oltre il punto V^{m-k} e nessuno altro, si ha:

[4]) Si può anche dire: *Ogni punto $(k-i)$uplo della C' funziona per la $C^{m-3-\alpha}$ come punto $(\alpha-i)$uplo e perciò presenta $\frac{1}{2}(\alpha-i)(\alpha+1-i)$ condizioni lineari dipendenti dalle rimanenti.*

Per le curve C', e quindi per tutte le curve $_kC^m_p$ *di specie* s *tipiche, la sovrabbondanza del sistema delle curve* $C^{m-s-\alpha}$ *agg. è data da*

$$\rho_\alpha = \frac{1}{2}\,\alpha(\alpha+1)(s-1).$$

Cosicchè, per le curve C^{m-k-1} agg. la sovrabbondanza è data da

$$\rho_{k-2} = \frac{1}{2}(k-2)(k-1)(s-1) \quad ;$$

per le curve C^{m-k} agg. la sovrabbondanza è data da

$$\rho_{k-3} = \frac{1}{2}(k-3)(k-2)(s-1) \quad ;$$

per le curve C^{m-k+1} agg. la sovrabbondanza è data da

$$\rho_{k-4} = \frac{1}{2}(k-4)(k-3)(s-1) \quad ;$$

per la curva C^{m-4} agg. è data da

$$\rho_1 = s-1 \quad ;$$

e infine per le curve C^{m-3} agg. è data da $\rho_0 = 0$, come doveva essere.

12. Applicando questi valori di ρ alle formole del n. **8** si hanno per le successive serie canoniche delle curve k-*gonali tipiche di specie* s i seguenti caratteri:

a) Per la $(k-1)$esima serie canonica:

$$N_{k-2} = km-k(k+1)-k(k-1)(s-1) = km-k(k-1)s-2k;$$
$$R_{k-2} = m-k-1-\frac{1}{2}k(k-1)(s-1)+\frac{1}{2}(k-2)(k-1)(s-1) = m-ks+s-2.$$

b) Per la $(k-2)$esima serie canonica:

$$N_{k-3} = (k+1)m-k(k-1)s-2k;$$
$$R_{k-3} = 2(m-ks)+3s-3.$$

c) Per la $(k-3)$esima serie canonica:

$$N_{k-4} = (k+2)m-k(k-1)s-2k;$$
$$R_{k-4} = 3(m-ks)+6s-4.$$

d) Per la $[k-(i-1)]$esima serie canonica:

$$N_{k-i} = (k+i-2)\,m - k\,(k-1)\,s - 2k\,;$$
$$R_{k-i} = (i-1)\,(m-ks) + \frac{1}{2}\,i\,(i-1)\,s - i.$$

e) Per la 1ª serie canonica si conferma che:

$$N_0 = 2p-2 \quad ; \quad R_s = p-1.$$

13. Si hanno formole meravigliosamente semplici ed armoniose quando si esprimono i caratteri delle serie canoniche delle curve k-gonali tipiche di specie s in funzione di R_{k-2}, che per semplicità abbiamo indicato ed indichiamo con R (quando non risulti equivoco).

Delle dette curve l'ordine ed il genere in funzione di R risultano dati da

$$m = R + (k-1)s + 2 \quad , \quad p = \frac{k-1}{2}\,[2R + (k-2)s + 2]$$

e quindi:

a) I caratteri della $(k-1)$esima serie canonica sono:

$$N_{k-2} = k\,[m-(k-1)\,s-2] = kR \quad ; \quad R_{k-2} = R.$$

b) Quelli della $(k-2)$esima serie canonica sono:

$$N_{k-3} = k\,R + m = (k+1)\,R + (k-1)\,s + 2\,;$$
$$R_{k-3} = 2\,R + s + 1.$$

c) Quelli della $(k-3)$esima serie canonica sono:

$$N_{k-4} = (k+2)\,R + 2\,(k-1)\,s + 4\,;$$
$$R_{k-4} = 3\,R + 3\,s + 2.$$

d) Quelli della $(k-i)$esima serie canonica sono:

$$N_{k-i} = (k+i-2)\,R + (i-2)\,(k-1)\,s + 2\,(i-2)\,;$$
$$R_{k-i} = (i-1)\,R + \frac{1}{2}\,(i-1)\,(i-2)\,s + (i-2).$$

e) Quelli della 1ª serie canonica risultano, come doveva essere,

$$N_0 = 2p-2 \quad ; \quad R_0 = p-1\,.$$

14. In particolare per le curve *tipiche di specie* s.

a) Nelle curve iperellittiche vi è una sola serie canonica, per la quale

$$N_0 = 2\,R_0\,.$$

b) Nelle curve *trigonali* vi sono due sole serie canoniche, per le quali

$$N_1 = 3\,R_1\,;$$

$$N_0 = 4\,R + 2\,s + 2 \qquad ; \qquad R_0 = 2\,R + s + 1$$

e quindi

$$N_0 = 2\,R_0\,.$$

c) Nelle curve *tetragonali* vi sono tre sole serie canoniche, per le quali

$$N_2 = 4\,R_2\,;$$

$$N_1 = 5R + 3\,s + 2 \qquad , \qquad R_1 = 2R + s + 1\,;$$

$$N_0 = 6R + 6\,s + 4 \qquad , \qquad R_0 = 3R + 3s + 2$$

e qulndi

$$N_0 = 2\,R_0\,.$$

d) Nelle curve *pentagonali* vi sono quattro sole serie canoniche, per le quali

$$N_3 = 5\,R_3\,;$$

$$N_2 = 6R + 4\,s + 2 \qquad , \qquad R_2 = 2R + s + 1\,;$$

$$N_1 = 7R + 8\,s + 4 \qquad , \qquad R_1 = 3R + 3s + 2\,;$$

$$N_0 = 8R + 12\,s + 6 \qquad , \qquad R_0 = 4R + 6s + 3\,;$$

e quindi

$$N_0 = 2R_0\,,$$

ecc. ecc.

§ 3. *Serie residue nelle curve tipiche di specie* s.

15. Un problema di alta importanza della Geometria delle curve algebriche è quello di determinare la dimensione della serie residua di una determinata *serie completa* rispetto ad un'altra serie pure *completa* di ordine più elevato. Questo problema fu tentato ed incompletamente risoluto da B. Riemann per rispetto soltanto alla 1ª serie canonica, quella delle C^{m-3} agg., che erano le uniche curve agg. che allora per le sue geniali creazioni si cominciavano a studiare. Esso fu completato da Roch, parecchi anni dopo, per cui il teorema famoso porta il nome di Riemann-Roch.

In base ad esso già notammo, fin dal 1893, che nelle curve *k*-gonali la serie residua della serie canonica segata dalle C^{m-3+k} agg. rispetto alla

1ª serie canonica è una serie completa

$$g_{m\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha+3)+\rho_\alpha} ;$$

perchè, se $g_m{}^r$ è la serie cercata, in base al detto teorema, deve essere

$$r = p - 1 - (N_\alpha - R_\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+3) + \rho_\alpha .$$

16. Applicando questo teorema alle curve *regolari*, poichè per esse tutti i valori ρ_α sono nulli, la serie residua cercata è una $g_{m\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha+3)}$ quindi si può affermare:

a) La serie segata sulle curve k*-gonali* **regolari** *dalle curve del piano di qualunque ordine è sempre completa.*

b) In particolare: *è completa la serie segata su di essa dalle rette del piano,* $g_m{}^2$, perciò:

c) Le curve k*-gonali regolari piane sono curve normali nel piano, non possono cioè essere proiezioni di curve dello stesso ordine appartenenti a spazii superiori.*

Le curve regolari si vanno dunque ad aggiungere a tutte le curve normali piane, che abbiamo già precedentemente assegnate.

Ad esse non si poteva pervenire con i metodi spaziali.

17. Il teorema di R-R non si può applicare a trovare la serie residua di ogni serie canonica rispetto ad una qualunque altra serie canonica di ordine maggiore. Per le curve regolari ci si arriva applicando il teorema enunciato nella Nota *Nuovo metodo* [5]) che con le notazioni ivi usate è espresso da

$$s = q + r + \beta\gamma , \qquad \text{da cui} \qquad r = s - q - \beta\gamma ,$$

Consideriamo dapprima la $(k-1)$esima serie canonica e la serie residua rispetto alla $(k-2)$esima serie canonica. Si ha:

$$\begin{array}{lll} \beta = 1 \quad , & \gamma = m - k - 1 \quad , & \beta + \gamma = m - k \\ \rho' = 0 & \rho'' = 0 & \rho''' = 0 \\ r = x & R_{k-2} & R_{k-3} \end{array}$$

e pel teorema citato

$$\begin{aligned} x &= R_{k-2} - R_{k-3} - (m - k - 1) \\ &= 2(m-k) - 0 - (m-k-1-0) - (m-k-1) = 2 . \end{aligned}$$

---

[5]) AMODEO, *Nuovo metodo per la Geometria delle serie lineari delle curve algebriche* (Rend. di questa Acc. Napoli, 1° Dic. 1938), Teor. 2° della p. 20, § 8, n. 4.

Se invece consideriamo due successive serie canoniche, quelle segate dalle $C^{m-3-(k-i)}$ e $C^{m-3-(k-(i+1))}$ agg., si ha analogamente

$$\beta = 1 \quad , \quad \gamma = m-3-k+i \quad , \quad \beta+\gamma = m-3-k+i+1$$
$$r = x \qquad R_{k-i} \qquad R_{k-i-1}$$
$$x = R_{k-i-1} - R_{k-i} - (m-k-1)$$
$$= m-k-\frac{(i-2)(i+1)-(i-3)i}{2}-(m-k-1) = 2.$$

Ciò conferma il teorema *b*) del n. **16.**

18. Ma per le curve nè il teorema precedente nè il teorema di *R.-R.* si possono più applicare, per cui è stato necessario di trovare qualche ripiego che potesse equivalere a quel che sarebbe il teorema di *R-R* esteso a qualunque serie canonica. Ciò abbiamo ottenuto per le *curve tipiche di specie s*, ricorrendo al significato funzionale del teorema di *R R*, che consiste nel trovare le condizioni sovrabbondanti a cui devono soddisfare le curve che passano per i gruppi della serie parziale per poter segare la serie residua rispetto alla assegnata serie canonica.

Questo ripiego è il seguente.

Noi conosciamo il valore di ρ_{k-4} per le curve *tipiche di specie* s e sappiamo pure che (cfr. qui n. **13**, c) il valore di $R_{k-3} = 2R + s + 1$; inoltre sappiamo che le curve C^{m-4} agg., che passano per un gruppo della g_k^1, soddisfano a 2 condizioni lineari indipendenti [6]), dunque le C^{m-4} agg. che passano per gli R gruppi della g_k^1 della $g^{R_{k-2}}_{N_{k-2}}$ soddisfano a $2R_{k-2}$ condizioni indipendenti, perciò la residua di questa serie rispetto alle serie $g^{R_{k-3}}_{N_{k-3}}$ delle curve *tipiche di specie* s è una serie g_m^{s+1} di dimensione $s+1$. Così si conferma che:

Le curve k *gonali tipiche di specie* s *sono proiezioni di curve dello stesso ordine normali per lo spazio* S_{s+1} *di dimensione* s+1.

In particolare:

Le curve k *gonali di 1ª specie tipiche sono curve normali pel piano.*

Questo avevamo affermato di poter dimostrare nella p. 31, n. **17** della Nota, *Il problema della gonalità*, accolta in questi Rend. il 7 dic. 1910.

Ora abbiamo espletato questa parte del compito propostoci.

§ 4. — *Caratteri per le curve atipiche di specie* s.

19. Anche per le curve *atipiche di specie s* i valori di ρ_α furono determinati fin dal 1900, nella nota [2]); che, essendo stata l'ultima estrinsecazione delle ricerche di quel tempo, è stata negletta e dimenticata da noi stessi financo.

[6]) AMODEO, *Curve k-gonali di specie* s, cfr. nota [1]).

Ivi infatti al n. 6 dicemmo:

Se h_j è il numero dei punti j-upli $(k-\alpha<j\leq k)$ e se due qualunque punti multipli non sono allineati con V la sovrabbondanza del sistema delle $C^{m-3-\alpha}$ è data da

$$\rho_\alpha=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)(s-1)+\frac{1}{2}\sum h_j(\alpha+j-k)(\alpha+j+1-k).$$

Ma qui possiamo meglio specificare dicendo:

Se indichiamo con h_{k-1} *il numero dei punti* $(k-1)$*upli, con* h_{k-2} *il numero dei punti* $(k-2)$*upli (nell'ipotesi che due o più di essi non siano allineati con* V*) il valore di* ρ_α *sarà dato da*

$$\rho_\alpha=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)(s-1)+\frac{1}{2}(\alpha-1)\alpha h_{k-1}+\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha-1)h_{k-2}+\ldots+3h_{k-\alpha+2}+h_{k-\alpha+1}$$

20. *a*) Per $\alpha=1$ la formola si riduce a

$$\rho_1=s-1\quad,$$

poichè tutti gli altri termini sono nulli o negativi, o anche perchè i punti di multiplicità $\leq k-1$ non presentano condizioni di dipendenze alle C^{m-4} aggiunte. E ciò vale anche se due o più punti multipli sono allineati con V, poichè la somma delle loro multiplicità deve essere $\leq k$, quindi la somma delle multiplicità che essi hanno per le C^{m-4} agg. è $\leq k-2$ e perciò la retta su cui essi stanno, si stacchi o non dalle curve agg., sempre questi punti non rappresentano condizioni di dipendenza per le C^{m-4} agg.

Cosicchè in tutti i casi sulle curve C^{m-4} agg. non influiscono i punti di multiplicità inferiore a k e perciò:

Tutte le curve k*-gonali di specie* s*, anche atipiche, sono sempre proiezioni di curve dello stesso ordine normali per lo spazio* S_{s+1} *di dimensione* s+1. *Esse appartengono a superficie rigate razionali di ordine* s*, di cui ogni generatrice sega la curva in* k *punti.* [7]).

In particolare:

Su tutte le curve di 1ª *specie tipiche o atipiche la serie segata dalle rette del piano è completa e quindi anche le curve atipiche di* 1ª *specie sono normali pel piano.*

b) Per $\alpha=2$, la sovrabbondanza del sistema della C^{m-5} agg. si riduce a

$$\rho_2=3(s-1)+h_{k-1},$$

poichè sulle curve C^{m-5} agg. non influiscono i punti di multiplicità $\leq k-2$.

[7]) Cfr. Amodeo, *Spazio normale e genere massimo*... (Rend di questa Acc. Napoli 1898 a 5).

E ciò anche se due o più punti multipli sono allineati con V, perchè la somma delle loro multiplicità per le curve agg. è sempre $\leq k-2$, quindi:

In tutte le curve tipiche o atipiche di specie s *le coniche del piano segano una serie* g_m^5 *contenuta nella serie completa*

$$g_{2m}^{5+3(s-1)+h_{k-1}}$$

di ordine 2m *e di dimensione* $5+3(s-1)+h_{k-1}$.

In particolare per le curve di 1ª specie

$$\rho_2 = h_{k-1} \quad .$$

c) Per $\alpha=3$, la sovrabbondanza del sistema delle curve agg. C^{m-6} è

$$\rho_3 = 6(s-1) + 3h_{k-1} + h_{k-2},$$

poichè sulle curve agg. C^{m-4} non influiscono i punti di multiplicità $\leq k-3$; e così pure quelli che allineati con V hanno la somma delle multiplicità per le curve agg, $\leq k-3$; quindi:

In tutte le curve tipiche o atipiche di specie s *la serie segata dalle cubiche del piano* g^9_{3m} *è contenuta nella serie completa*

$$g_{3m}^{9+6(s-1)+3h_{k-1}+h_{k-2}}$$

eccetto quando due punti multipli allineati con V *hanno la somma delle loro multiplicità* $=$ k, *nel qual caso* ρ_3 *viene aumentato di una metà.*

In particolare per le curve di 1ª specie *anche atipiche*

$$\rho_3 = 3h_{k-1} + h_{k-2}.$$

E così via per $\alpha=5, 6$, ecc.

d) Per $\alpha=k-2$, la sovrabbondanza delle curve C^{m-k-1} agg. (minime) è

$$\rho_{k-2} = \frac{1}{2}(k-2)(k-1)(s-1) + \frac{1}{2}(k-3)(k-2)h_{k-2} + \ldots + 3h_4 + h_3.$$

Su di esse non influiscono i punti doppi, i punti tripli rappresentano 1 condizione di dipendenza, i punti quadrupli 3, i quintupli 6, ecc.

e) Per la C^{m-k} agg. non influiscono i punti tripli, i punti quadrupli valgono 1 condizione, i quintupli valgono 3 condizioni, ecc.

f) Come controllo al ragionamento dei casi precedenti osserviamo che: per $\alpha=0$ si conchiude che per le curve agg. C^{m-3} i punti multipli presentano sempre condizioni indipendenti, anche quando due o più punti multipli sono allineati con V, poichè sempre la somma delle loro multiplicità per rispetto alle curve agg. rimane minore o uguale a k.

21. Considerando i valori di $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ al variare di k si ha:

a) Per $k = 2$. *Le curve bigonali tipiche o atipiche hanno soltanto la 1ª serie canonica per la quale sempre*

$$\rho_0 = 0 .$$

b) Per $k = 3$. *Le curve trigonali tipiche o atipiche hanno 1ª e 2ª serie canonica, e per esse*

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = s - 1$$

e se sono di 1ª specie

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 .$$

c) Per $k = 4$. *Le curve tetragonali tipiche o atipiche hanno 1ª, 2ª e 3ª serie canonica, per le quali*

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = s - 1 \quad , \quad \rho_2 = 3(s-1) + h_3$$

e se sono di prima specie

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 \quad , \quad \rho_2 = h_3 .$$

d) Per $k = 5$. *Le curve pentagonali tipiche o atipiche hanno 1ª, 2ª, 3ª, 4ª serie canonica e per esse*

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = s - 1 \quad , \quad \rho_2 = 3(s-1) + h_4 \quad , \quad \rho_3 = 6(s-1) + 3h_4 + h_3$$

e se sono di prima specie

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 \quad , \quad \rho_2 = h_4 \quad , \quad \rho_3 = 3h_4 + h_3 .$$

e) Per $k = 6$. *Le curve esagonali tipiche o atipiche hanno 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª serie canonica e per esse*

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = s-1 \quad , \quad \rho_2 = 3(s-1) + h_5 \quad , \quad \rho_3 = 6(s-1) + 3h_5 + h_4 ,$$
$$\rho_4 = 10(s-1) + 6h_5 + 3h_4 + h_3$$

e se sono di 1ª specie

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 \quad , \quad \rho_2 = h_5 \quad , \quad \rho_3 = 3h_5 + h_4 \quad , \quad \rho_4 = 6h_5 + 3h_4 + h_3 .$$

Ecc., ecc. . . .

Napoli, ottobre 1942, XXI.

Sulle caratteristiche tecniche e costituzionali del gesso da presa.

Nota del dott. **Luigi Santarelli**, *presentata dal socio ord.* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 7 novembre 1942 - XXI)

Sunto. — Vengono precisate le forme anidre e idrate del solfato di calcio e ne vengono riportati i röntgenogrammi, dai quali appare, in accordo con precedenti lavori, che una forma di anidrite, che viene chiamata anidrite 1ª, presenta un röntgenogramma uguale a quello del semiidrato, mentre le altre forme anidre hanno reticolo uguale alla anidrite naturale. Vengono illustrati i metodi messi a punto per la preparazione della anidrite 1ª e del semiidrato, e vengono indicate le modalità analitiche per la loro determinazione quantitativa. Seguendo il progressivo innalzamento di temperatura durante la idratazione di questi prodotti si mettono in evidenza le differenze di comportamento, atte a differenziarli nettamente, ed a riconoscere la eventuale presenza di biidrato, anche se in piccole quantità.

Applicando infine l'analisi razionale al processo di disidratazione del biidrato, in parallelo all'analisi termica, vengono identificati i vari costituenti esistenti alle diverse temperature e, particolarmente, in relazione agli effetti endotermici.

Con il lavoro dello Stratta, comparso nel numero di Gennaio del 1934 di « L'Industria Chimica » è stata fatta una precisa messa a punto relativa alla struttura delle due forme idrate del solfato di calcio e delle varie forme anidre. Fra queste ultime lo Stratta distingue una forma con reticolo uguale al semiidrato, e con caratteristiche di presa ed indurimento corrispondenti a questo, stabile fin sotto i 160°, anche per lunga durata di cottura. Per durata di cottura fino ai 45 giorni, alle temperature di 200°-210°, lo Stratta trova che l'anidrite mantiene la struttura del semiidrato. Soltanto per durate di 175 giorni si ha una variazione del reticolo, con apparizione, a lato delle righe del semiidrato, anche di quelle della anidrite naturale (Volpinite). Per cottura di 170 giorni a 250° scompare completamente il reticolo del semiidrato per comparire soltanto quello della anidrite naturale.

Oltre questa temperatura il reticolo rimane sempre inalterato ed uguale a quello della Volpinite, mentre variano però le caratteristiche relative al processo di idratazione. Sotto questo punto di vista si possono distinguere le seguenti forme di anidrite:

a) fino a 400° si ha un prodotto con idratazione molto più lenta di quella del semiidrato, ma enormemente più rapida di quella della anidrite naturale. Si può indicare questa anidrite col nome di anidrite a lenta presa.

b) Oltre i 400° si ottiene un prodotto con caratteristiche di idratazione identiche a quelle della anidrite naturale.

La forma anidra riconosciuta dallo STRATTA con struttura identica al semiidrato, si identifica con l'anidrite solubile del VANT'HOFF, il quale, in base allo studio del sistema: biidrato — anidrite solubile — acqua, stabilì che a 93° si può avere, sia pure con molta lentezza, la trasformazione del biidrato in anidrite solubile, mentre il più basso punto di trasformazione a semiidrato si trova a 107°.

Nella trattazione sperimentale che presento in questa nota sono partito dalle precisazioni dello STRATTA per mettere a punto i metodi di determinazione quantitativa del semiidrato e della anidrite, avente struttura uguale a quello, che chiamerò anidrite 1ª, determinazione che è indispensabile per poter eseguire una analisi razionale del gesso da presa. Con il metodo delle curve termiche ho poi seguito l'andamento del processo di idratazione dei due costituenti, che si possono in tal modo differenziare nettamente, come anche si può riscontrare con questo metodo la presenza di minime quantità di biidrato.

I metodi di analisi razionale mi hanno permesso di seguire con precisione l'analisi termica del processo di cottura del gesso biidrato, con la identificazione dei singoli prodotti formatisi alle varie temperature.

Preparazione della anidrite 1ª e del gesso semiidrato.

Per la preparazione della anidrite 1ª sono partito da grossi cristalli di gesso di elevata purezza. La cottura veniva eseguita in crogiuolo posto in fornello elettrico a resistenza di nichel-cromo ed appeso, mediante filo di platino, al piatto di una bilancia analitica, in modo da poter seguire continuamente la perdita di peso della sostanza. Dopo 3 ore di cottura a 170° si otteneva una perdita di peso costante, mentre permaneva nel prodotto ancora 0.15 °/₀ di acqua e ciò in accordo con le esperienze di STRATTA. Questo prodotto è stato sottoposto alla analisi röntgenografica e riconosciuto con reticolo uguale a quello del semiidrato e diverso da quello della anidrite naturale e di quella artificiale cotta oltre i 300° (Vedi fig. 1).

Questi campioni di anidrite 1ª, preparati allo stato di elevata purezza, sono stati utilizzati per mettere a punto il metodo di determinazione quantitativa di questa forma di gesso anidro a lato del semiidrato.

Per questa determinazione è stata sfruttata la proprietà presentata da questo prodotto di assorbire rapidamente acqua quando sia mantenuto in ambiente umido. WANDSER [1]) accenna che lasciando l'anidrite in un ambiente con 65 °/₀ di umidità relativa si ha passaggio rapido e semiidrato.

---

[1]) WANDSER, Tonind. Z. 1937, n. 3.

Dai miei controlli ho constatato invece che, col grado di umidità del 65 % ed alla temperatura di 18°, (tensione di vapore di 10 mm), si ottiene un assorbimento costante di acqua di 7,74 %, il quale corrisponde alla formazione di 93,5 % di semiidrato e 6,5 % di biidrato. Ho allora abbassato

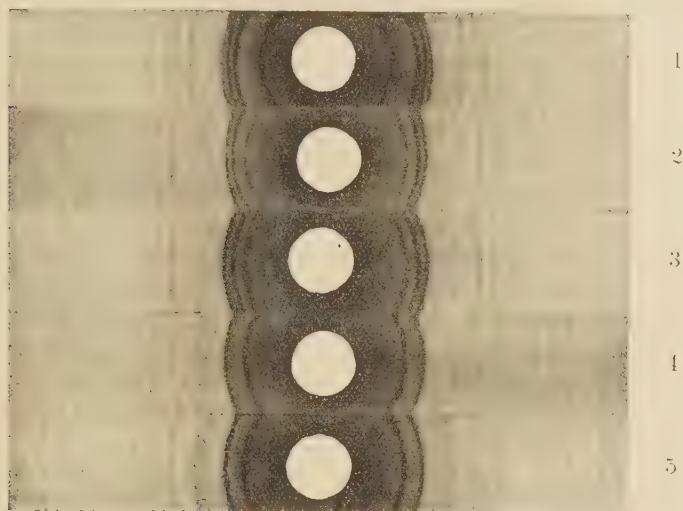



Fig. 1.

1 : Röntgenogramma del biidrato
2 : » » semiidrato
3 : » della anidrite 1ª
4 : » » anidrite cotta a 300°
5 : » » Volpinite

la umidità relativa portandola al 40 % (tensione di vapore di 6.50 mm), ed ho ottenuto un aumento in peso di 6.80 %, cui corrisponde la formazione di 97 % di semiidrato e 3 % di biidrato. Soltanto quando si abbassi l'umidità relativa al 35 % (tensione di vapore di 6.10 mm), si ottiene un aumento in peso di 6.68 %, corrispondente alla formazione di 100 % di semiidrato. Anche lasciando per vari giorni il prodotto nell'ambiente condizionato a umidità di 35 % non ho notato nessun ulteriore aumento di peso. Varie determinazioni mi hanno sempre dato valori con scarti massimi compresi nell'1 %.

La preparazione del semiidrato ha richiesto particolari cautele per impedire la formazione della anidrite 1ª, che come abbiamo visto, si forma facilmente a lato del semiidrato, quando non si abbia cura di mantenere una certa tensione di vapore nell'ambiente di cottura. Usando per la cot-

tura un recipiente aperto, si ottiene sempre una miscela di semiidrato e di anidrite 1ª, anche mantenendo la temperatura sotto i 120° Il modo più pratico per ottenere semiidrato esente assolutamente da anidrite e da biidrato è quello di scaldare il materiale a 120° in recipiente chiuso, munito di valvola di scarico, con chiusura di pochi mm. di mercurio, per la uscita del vapore surriscaldato, in modo da mantenere nell'interno del recipiente una tensione di vapore di circa 760 mm. Con continui prelievi di campioni si può determinare quando il prodotto contiene una quantità di acqua residua corrispondente alla formazione di tutto semiidrato. Non è detto però che a questo punto si sia in presenza di questo solo composto, perchè può aversi, come generalmente accade, una miscela contenente con il semiidrato anche piccole quantità di biidrato e di anidrite. Questi costituenti possono però farsi scomparire facilmente qualora si prosegua alla cottura in recipiente ermeticamente chiuso e si innalzi la temperatura a 135° circa, mantenendo questa temperatura per la durata di 1 ora: con tale trattamento l'anidrite si idrata a spese dell'acqua del biidrato, che passa a semiidrato, mentre il semiidrato preesistente non subisce variazioni. Ho controllato questa reazione ponendo in recipiente chiuso una miscela di gesso biidrato e di anidrite 1ª, in proporzioni tali da avere 6,21 % di H_2O, che è la percentuale di acqua del semiidrato. Dopo 1 ora di cottura a 135° il prodotto ottenuto, avente 6,21 % di acqua, non conteneva assolutamente anidrite 1ª e quindi doveva risultare costituito da solo semiidrato, dato che alla temperatura di 135°, in presenza di vapore, non può formarsi anidrite a lenta presa.

Questo procedimento è stato applicato per preparare campioni abbondanti (fino a 5 Kg.) di prodotto, utilizzando un tamburo che veniva mantenuto in rotazione con circa 20 giri al minuto e scaldato a gas a 120°, lasciando uscire il vapore dalla valvola di scarico a mercurio, collegata con un foro passante attraverso l'albero di rotazione. I campioni venivano prelevati da un foro praticato nel mantello del tamburo e chiuso con apposita vite.

Quando i valori della perdita al fuoco dei campioni prelevati si avvicinano al valore corrispondente al semiidrato e opportuno, dopo il prelievo del campione, chiudere il foro di emissione del vapore ed abbassare la temperatura fino a che non si ha il risultato della determinazione della perdita al fuoco. Raggiunto un valore della perdita al fuoco corrispondente a quella del semiidrato, occorre chiudere ermeticamente il tamburo, escludendo la valvola di scarico, ed, innalzata la temperatura a 130°-140°, scaldare ancora per 1 ora. Con questa ultima cottura spariscono anche le tracce di anidrite 1ª e di biidrato e si ottiene formazione completa di semiidrato.

Per determinare ponderalmente il semiidrato si procede alla completa idratazione di questo con eccesso di acqua e si determina la quantità di

acqua fissata nel passaggio da semiidrato a biidrato, previa eliminazione dell'acqua libera eccedente, mediante essiccamento a 50°-55°, temperatura alla quale il biidrato è perfettamente stabile. Il metodo che ho messo a punto va eseguito con le seguenti modalità: 5 gr. di materiale vengono pesati in capsula di vetro di circa 7 cm. di diametro, nella quale viene posta anche una bacchettina di vetro. Si aggiungono dopo la pesata 10 cmc. di acqua distillata e si agita bene con la bacchetta, cercando di prolungare l'agitazione per un tempo sufficiente per impedire la presa del gesso. Si copre con vetrino d'orologio e si lascia riposare per circa 2 ore, in modo da permettere la completa idratazione del semiidrato. Infine si pone la capsula in stufa a 50°-55° fino a peso costante, ciò che richiede generalmente 12 ore. Dall'aumento di peso riscontrato si calcola l'acqua combinata per il passaggio a biidrato; per controllo si ripete il trattamento con acqua e successivo riscaldamento fino ad avere due risultati consecutivi costanti.

Sia *n* l'aumento di peso; si avrà allora:

$$\frac{n \times 5.37}{5} \times 100 = \% \text{ semiidrato}$$

Quando il campione esaminato contenga anidrite 1ª, dosata in precedenza col metodo già descritto, occorrerà sottrarre all'acqua di idratazione trovata nella determinazione del semiidrato quella corrispondente alla anidrite: sia *m* la quantità di acqua assorbita dalla anidrite a 35 % di umidità; avremo allora:

$$\frac{(n - 4\,m) \cdot 5.37}{5} \cdot 100 = \% \text{ semiidrato}$$

Per la preparazione del semiidrato e della anidrite 1ª in quantità elevate sono partito da grossi cristalli di gesso dei giacimenti siciliani in provincia di Messina, aventi la seguente composizione:

$CaSO_4$ = ...	78,40 %
H_2O comb.	20.70 %
$CaSO_4 \cdot 2H_2O$ . .	99.00 %

L'anidrite è stata preparata per cottura a 170° in recipiente riscaldato elettricamente, nel quale il materiale era mantenuto continuamente in agitazione. Si è ottenuto un prodotto, che al controllo chimico ha dato i seguenti risultati:

aumento di peso in ambiente a 35 % di umidità: 6.56 %
anidrite 1ª = 6.56 % × 15.1 = 99.00 %.

Si è quindi avuto praticamente passaggio completo da biidrato ad anidrite 1ª.

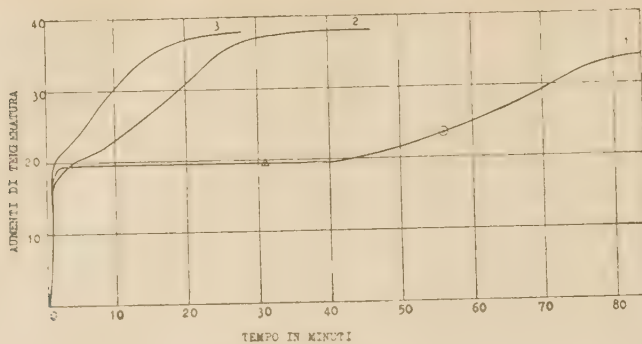



Fig. 2.

1 : Curva della anidrite 1ª
2 : » » » + 1 % biidrato
3 : » » » + 5 % »

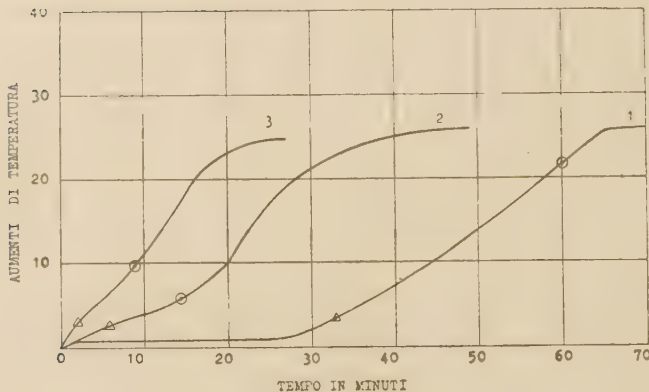



Fig. 3.

1 : Curva del semiidrato
2 : » » » + 1 % biidrato
3 : » » » + 5 % »

Il semiidrato preparato col metodo descritto ha dato al controllo chimico i seguenti risultati [2]:

[2]) Le stesse determinazioni eseguite sul campione prelevato durante la cottura, prima di effettuare l'ultimo stadio in apparecchio chiuso ermeticamente, avevano dato i seguenti risultati: anidrite 1ª : 1.60 %; semidrato 96.70 %; biidrato 1 %.

Perdita à fuoco: 6.15 %;
Alla determinazione della anidrite 1ª: aumento di peso = 0 %;
Alla determinazione del semiidrato:
Aumento di peso: 18.42 %;
Gesso semiidrato: 18.42 % × 5.37 = 98.71 %.

Tenendo conto degli inevitabili leggeri errori sperimentali, si può quindi considerare di avere avuto completa formazione di semiidrato.

Analisi termica del processo di idratazione della anidrite 1ª e del semiidrato.

Per l'anidrite 1ª e per il semiidrato ho determinato le curve termometriche relative al periodo della presa e del successivo indurimento. Le prove sono state eseguite in un vaso di DEWAR di 300 cmc. di capacità, nel quale veniva introdotta la pasta di gesso, formata da 200 grammi di prodotto impastato per 1 minuto con 100 cmc. di acqua. Per impedire che il provino di gesso, provochi, col rigonfiamento conseguente alla idratazione, la rottura del vaso di DEWAR, quest'ultimo veniva rivestito internamente con un foglio di cartone ondulato. Il vaso veniva chiuso con tappo di sughero, attraverso il quale veniva fatto passare un termometro diviso in decimi di grado.

Le curve termometriche ricavate da queste prove (fig. 2 e fig. 3) si prestano bene per una rapida e netta differenziazione fra anidrite 1ª e semiidrato e per mettere in evidenza l'effetto di piccole aggiunte di biidrato a questi due prodotti.

Esaminiamo ad es. la curva termometrica relativa alla idratazione della anidrite 1ª: si nota un rapidissimo innalzamento di temperatura, che raggiunge entro due minuti i 19.5°; segue poi un lungo tratto orizzontale fino al 40', a partire dal quale riprende l'innalzamento di temperatura per giungere al 78' a 33°. Con la ripresa del riscaldamento coincide l'inizio di presa determinato con l'ago di VICAT. Nelle figure 2 e 3 i triangoletti indicano l'inizio della presa, i cerchietti la fine.

La curva del semiidrato segue invece un andamento nettamente diverso; si ha inizialmente un leggerissimo innalzamento di 1°, dovuto presumibilmente al calore di soluzione del semiidrato in acqua, seguito da un periodo di stasi fino al 33° minuto, con cui ha inizio la presa e si riprende anche il riscaldamento che giunge al 65' al massimo di temperatura di 25.5°.

Dal confronto delle due curve notiamo che esse si differenziano essenzialmente per il riscaldamento iniziale della anidrite, riscaldamento cui non corrisponde però nessuna facoltà di indurimento della massa, ciò che farebbe presumere che questo primo innalzamento di temperatura corrisponda essenzialmente alla idratazione della anidrite a semiidrato [3]. Se

[3]) Vedasi ad es.: CHASSEVENT, *Revue des Materiaux*, 1927, n. 1.

facciamo però un semplice calcolo del calore competente a questo passaggio, troviamo che esso è molto al disotto del valore registrato nella nostra prova, anche senza tener conto del calore disperso e di quello assorbito dall'insieme calorimetrico. Infatti secondo VANT'HOFF il calore molecolare di idratazione della anidrite solubile a semiidrato è di 819 calorie e quindi di 6 calorie per gr. In base a questo dato calcoliamo quanto dovrebbe essere l'innalzamento di temperatura nella nostra prova, ammettendo naturalmente nullo il disperdimento ed il calore assorbito dal termos. tappo di sughero e termometro:

$$\Delta t = \frac{6 \times 200}{(212,4 \times 0,23) + (100 - 12,4)} = 8.8^0$$

dove:

0.23 = cal. spec. del gesso semiidrato,

213,4 = quantità di semiidrato corrispondente a 200 gr. di anidrite.

12,4 = acqua combinata per il passaggio da anidrite a semiidrato.

L'innalzamento di temperatura trovato con questo calcolo risulta molto inferiore all'innalzamento reale riscontrato nella prima fase della idratazione; sembra quindi che in questa prima fase la idratazione non sia limitata al passaggio a semiidrato ma si abbia una parziale formazione di biidrato, la quale implica lo sviluppo di una quantità di calore più elevata. Infatti la reazione $2CaSO_4H_2O + 3H_2O = 2CaSO_4 2H_2O$ implica le sviluppo di 3921 cal. per molecola di semiidrato e quindi 27 cal./gr.

Nella nostra prova avremmo quindi, per il passaggio da semiidrato a biidrato, il seguente innalzamento di temperatura:

$$\Delta t = \frac{27 \times 212,4}{(237,3 \times 0,27) + (100 - 37,3)} = 45,8^0$$

Quindi l'innalzamento totale di temperatura per la idratazione della anidrite a biidrato è dato da $45,8 + 8,8 = 54,6^0$, del quale $\frac{8,8 \cdot 100}{54.8} = 16\ \%$ competenti alla idratazione della anidrite a semiidrato, e $\frac{45.8 \cdot 100}{54.80} = 84\ \%$ dovuti al passaggio del semiidrato a biidrato.

In pratica notiamo che questi rapporti di temperatura calcolati non corrispondono assolutamente ai riscaldamenti della prima e della seconda fase della curva termometrica della anidrite: infatti il rapporto fra gli innalzamenti di temperatura nelle due fasi è all'incirca di 1 : 1, mentre dal calcolo risulta che dovrebbe essere di 1 : 5.2. Dai risultati quindi di questa prova termometrica, anche se eseguita in condizioni non adiabatiche, risulta nettamente che nel processo di idratazione della anidrite 1ª avviene il sovrapporsi dei due stadi, con formazione di una elevata quantità

di biidrato anche nella prima fase di idratazione della anidrite, ciò che coincide con quanto ho avuto modo di constatare sperimentando sull'effetto della umidità sulla idratazione della anidrite 1ª. A questa prima fase di idratazione non corrisponde però un inizio di rapprendimento della massa, come avviene quando si ha precipitazione di cristalli di biidrato dalla soluzione sovrasatura di semiidrato.

Le caratteristiche di presa e di resistenza della anidrite 1ª sono, nonostante questa diversità nel processo di idratazione, corrispondenti a quelle del semiidrato, come risulta dai seguenti risultati ottenuti nelle prove di trazione eseguite su impasti dei due prodotti con 50 % di acqua:

RESISTENZA A TRAZIONE IN Kg/cmq.

	a 3 ore	1 giorno	3 giorni	7 giorni	Presa Inizio	Presa Fine
Semiidrato . . .	18.7	19	20.2	31	33′	60′
Anidrite 1ª . . .	19	25	22.5	36	30′	56′

Risulta quindi che gli inizi di presa di questi prodotti sono molto lunghi, superiori ai 30′, mentre invece in pratica i prodotti commerciali difficilmente presentano inizi così lenti: nei casi di gessi considerati a presa molto lenta si hanno inizi fra i 15 ed i 20 minuti, ma non mi è mai capitato di riscontrare, nei numerosi controlli che ho avuto modo di effettuare, inizi oltre questo limite. Ciò dipende dal fatto che nei prodotti industriali è sempre presente, in minore o maggior misura, una certa quantità di cristalli di biidrato incotto, che agiscono notoriamente come germi di cristallizzazione nella soluzione del semiidrato. Bastano minime tracce di biidrato presenti per accelerare notevolmente la presa e variare la curva di riscaldamento del semiidrato e della anidrite 1ª. Si esaminino infatti le curve termiche relative alle miscele di anidrite o di semiidrato con 1 % e 5 % di biidrato: si nota già una variazione netta nell'andamento della curva termica con l'aggiunta dell'1 % di biidrato, variazione che si accentua nettamente con il passaggio alla dose del 5 %. Anche i tempi di presa sono fortemente variati già con la piccola aggiunta dell'1 %.

Dall'andamento di queste curve termometriche si può quindi constatare come questo metodo di controllo dia sufficienti elementi per riconoscere qualitativamente la presenza, in un gesso da presa, anche di minime quantità di biidrato, come anche la presenza di anidrite 1ª, la quale fa variare l'andamento della curva termometrica, ma non influenza nè il tempo di presa nè il successivo indurimento del gesso stesso.

Analisi termica del processo di cottura del gesso biidrato.

Applicando i metodi di determinazione ponderale della anidrite 1ª e del semiidrato ho voluto seguire il processo di disidratazione del biidrato con una analisi termica, seguendo non solo l'andamento della curva di riscaldamento ma anche il variare della costituzione del materiale in cottura. A tale scopo ho usato anche in questa prova un apparecchio di cot-

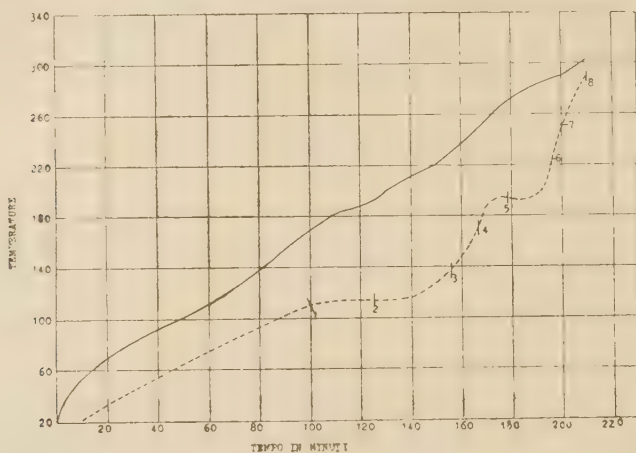



Fig. 4.

Temperatura della parete (continua)
» del materiale (tratteggiata)

tura che permettesse di mantenere il materiale in un ambiente avente tensione di vapore in equilibrio con la pressione atmosferica. Questo apparecchio è costituito da un recipiente cilindrico metallico di circa 2 litri di capacità, munito di coperchio a tenuta. Attraverso questo coperchio viene fatto passare l'albero di un agitatore ad elica, munito di valvola a mercurio, con vaschetta a campana, che garantisce la chiusura perfetta. Appena sotto il coperchio è stata derivata dal recipiente una tubazione laterale che pesca per 3-4 mm in mercurio. Nel recipiente viene introdotto un pirometro a coppia rame-costantana per la misura della temperatura della massa in cottura. Il recipiente ed il tubo laterale sono riscaldati con resistenza elettrica, la cui temperatura è regolabile mediante un reostato; la temperatura della parete del recipiente viene rilevata con un secondo pirometro.

Nel recipiente di cottura si introducono 400 gr. di materiale finemente macinato e s'inizia il riscaldamento regolare, facendo azionare l'agitatore meccanico. Si seguono le curve di riscaldamento della parete del recipiente

e dell'interno della massa, mentre si prelevano campioni del materiale in cottura, per mezzo di un'apposita sonda, applicabile al coperchio. Il vapore acqueo perduto durante la cottura viene espulso per mezzo della tubazione laterale, attraverso lo straterello di mercurio, mentre nell'interno dell'apparecchio si mantiene sempre una tensione di vapore in equilibrio con la pressione atmosferica.

Nella fig. 4 è riportato il grafico relativo alla disidratazione del materiale crudo, che è lo stesso di quello utilizzato anche per la preparazione dell'anidrite e del semiidrato. Durante la cottura sono stati prelevati vari campioni, nei punti indicati sul grafico stesso. Su questi campioni è stata determinata la perdita a fuoco e le percentuali di anidrite e semiidrato; si è risaliti poi col calcolo, in base alle determinazioni eseguite, alla percentuale di biidrato residuo. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella 1.

TABELLA I.

Analisi razionali dei campioni prelevati durante il saggio di cottura del gesso biidrato.

Campione	Temperatura di prelievo	Perdita a fuoco %	Semiidrato %	Anidrite 1ª %	Biidrato %
1	110°	19.60	6.41	0.00	93.00
2	114°	15.44	32.30	0.80	66.50
3	134°	6.92	91.60	2.02	6.13
4	175°	5.08	74.40	22.98	1.79
5	192°	1.80	24.10	69.20	1.44
6	222°	0.70	6.33	90 60	1.40
7	250°	0.60	—	82.70	—
8	289°	0.46	—	66.40	—

Fino a 110° non si ha nessuna variazione nella curva di riscaldamento del materiale. A 110° ha inizio un notevole arresto, corrispondente all'effetto endotermico dovuto al passaggio da biidrato a semiidrato. Nel punto 1 si trova il 6.41 % di semiidrato, che nel punto 2 aumenta a 32.30 % per passare al 91.60 % nel punto 3, quando l'effetto endotermico è praticamente terminato e la curva tende a salire nuovamente. Da notare che contemporaneamente al semiidrato comincia a comparire l'anidrite 1.ª, mentre permane il 6 % di biidrato. Dall'andamento di questa curva appare chiaro come sia indispensabile, se si vuole ottenere semi-

idrato puro, applicare il sistema di riscaldamento che ho più sopra descritto, con riscaldamento finale in recipiente chiuso, in modo da non aver ulteriore perdita di vapore. Nel punto 4, a 175°, ha inizio un secondo ginocchio, cui corrisponde l'inizio della disidratazione del semiidrato ad anidrite 1ª, con formazione di 23 % di quest'ultima, mentre il semiidrato scende al valore del 74 %. Nel punto 5, a 192°, si riscontra la formazione di 69.20 % di anidrite 1ª, mentre permangono ancora semiidrato (24.10 %) e biidrato (4.90 %). Nel punto 6 (222°) scompare praticamente il biidrato, il semiidrato si riduce a 6.36 %, mentre si ha 90.60 % di anidrite 1ª. Da questo punto si ha nuovamente un rapido innalzamento di temperatura, mentre l'anidrite 1ª va diminuendo, e si inizia il passaggio ad anidrite a lenta presa, come risulta dai campioni 7° ed 8°.

L'analisi termica eseguita in recipiente chiuso con valvola a mercurio, in modo che nell'interno si mantenga, quando si superino i 100°, una tensione di vapore di 760 mm, ha mostrato che il passaggio a semiidrato ha inizio a 110°, con un notevole assorbimento di calore. Il passaggio ad anidrite 1ª in queste particolari condizioni di sperimentazione ha luogo ad una temperatura più elevata di quella che è risultata sufficiente per la preparazione dello stesso prodotto in recipiente aperto; infatti, mentre nella prova di cottura in recipiente aperto si ottiene l'anidrite a 170°, in recipiente chiuso il campo di formazione dell'anidrite 1ª si è innalzato di circa 30°. Questa variazione dimostra quale sia l'effetto della tensione di vapore esistente nell'ambiente di cottura sulle trasformazioni studiate.

La differenziazione netta che, secondo i metodi descritti, si può effettuare fra i vari costituenti del gesso da presa, rappresenta un comodo ausilio per il controllo normale del gesso da presa, sul quale ho avuto modo di riscontrare la efficacia. All'analisi chimica razionale, alle prove di presa ed alla prova termica va naturalmente affiancata la prova di resistenza, sia col metodo proposto da Stratta, con la misura della impronta della bilia, sia con la prova a trazione. In ambedue queste prove, che seguono l'indurimento per essiccamento, occorre fissare un'umidità costante nell'ambiente di prova, dato che l'umidità ha una netta influenza sul decorso dell'indurimento. In base a varie prove eseguite propongo di fissare questa umidità su 60 % circa, che non si allontana di troppo dalle condizioni pratiche d'impiego. Va fatto notare a questo proposito che quello che molti tecnici chiamano «rinvenimento» non è che un ritardato essiccamento, dovuto molto spesso alla umidità dell'ambiente di maturazione e qualche volta ad impurezze del gesso che tendono a trattenere l'acqua eccedente, come ad es. impurità argillose o anche anidrite naturale od anidrite a lenta presa, ottenuta per sovracottura del gesso stesso. Questo argomento merita una trattazione più approfondita, sulla quale mi riprometto di ritornare.

L'ecclisse totale di Luna del 26 agosto 1942, e quella parziale di sole del 10 settembre 1942. Osservazioni fatte al R. Osservatorio di Capodimonte a Napoli.

Nota del socio **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 7 novembre 1942 - XXI)

Sunto. — Si dà notizia delle osservazioni dei due fenomeni fatte, sia direttamente che per mezzo di fotografie. Del primo, oltre a fotografie eseguite servendosi di opportuni filtri colorati, vennero osservati gli istanti dei contatti, e quelli delle successive entrate in ombra di crateri o di regioni lunari. Per il secondo vennero fissati gli istanti dei contatti, ed eseguite fotografie durante il corso del fenomeno.

Dopo un pomeriggio temporalesco e ben poco promettente per la notte successiva, a tarda sera del 25 agosto si iniziò un inatteso rapido rasserenamento, che si potè dire completo all'ora dell'inizio dell'ecclisse di Luna, ed acconsentì l'esecuzione delle osservazioni in buone condizioni di osservabilità, per tutta la prima fase del fenomeno, ossia fino al principio della totalità. Poi, quando la Luna si trovava già bassa all'orizzonte, nubi la copersero impedendo ogni ulteriore lavoro. Già fin dalla precedente ecclisse totale di Luna del 16-17 marzo 1942 si era predisposto un programma di osservazioni nella speranza, che le esperienze del marzo servissero a darci elementi almeno per ottenere un completo sfruttamento della successiva ecclisse dell'agosto. Ma il maltempo avuto in primavera, privandoci della possibilità di fare quelle prime esperienze, ci tolse il vantaggio che avremmo potuto avere da esse.

Oltre alle abituali osservazioni di contatti si era prevista l'esecuzione di fotografie, eseguite nel piano focale di tre distinti cannocchiali. Uno munito di obbiettivo apocromatico di Zeiss, di 80 millimetri di apertura libera e di 1375 mill. di distanza focale, e fissato all'equatoriale di Fraunhofer, portava una camera fotografica appositamente costruita nella nostra officina meccanica, e munita di otturatore a scatto per istantanee e per pose. La camera possedeva inoltre quattro filtri colorati, che permettevano ricavare oltre che fotografie con luce integrale, anche negative con luce compresa entro zone limitate di lunghezza d'onda: col filtro rosso si avevano le lunghezze d'onda comprese fra 5710 e 7080, con il giallo quelle fra 5000 e 7000; coi verde quelle fra 4800 e 6300, e finalmente con l'azzurro quelle fra 4300 e 5800. Con questa camera vennero usate pellicole

pancromatiche Agfa del tipo « isopan F », 17/10 din. di sensibilità, dando per i diversi filtri durate di posa proporzionali ai 1 : 1/8 : 1/4 : 1/8 rispettivamente per il rosso, il giallo, il verde e l'azzurro. Si eseguirono 12 gruppi di quattro fotografie, distanziati fra loro di 10 minuti, a cominciare da 2 ore e 12 minuti di T. U. (istante del primo contatto dell'ombra) fino alle 4 ore e 2 minuti (istante della totalità).

Il secondo cannocchiale, munito di comune lente acromatica di 68 mill. di apertura e 1080 di lunghezza focale, era unito pur esso all'equatoriale di Fraunhofer, e portava una camera analoga a quella del cannocchiale descritto or ora, ma aveva un solo filtro colorato rosso cupo atto a darci immagini nell'infrarosso (per lunghezze d'onda comprese fra 6630 e 7130). Vennero fatte con esso 13 fotografie utilizzando delle pellicole Ferrania per l'infrarosso del tipo 7200. Le durate di esposizioni furono il doppio di quelle usate per il filtro rosso all'altra camera, e gli istanti delle prove succedettero immediatamente quelli delle serie or ora accennate, essendosi solo aggiunta una prova prima dell'inizio della ecclisse. Mentre la prima serie di negative è riuscita ottima, e si presterà senza alcun dubbio ad indagini ulteriori, particolarmente sotto il punto di vista fotometrico, meno riuscite sono quelle ottenute col filtro per l'infrarosso, e ciò probabilmente per l'imperfetta focatura della camera dovuta alla poca correzione cromatica dell'obbiettivo per simili radiazioni.

La preparazione delle apparecchiature, e l'esecuzione di queste fotografie è dovuta all'astronomo ing. P. Vocca, che ebbe nel meccanico dell'Osservatorio signor V. Casella il solito realizzatore accurato e perfetto di quanto gli era stato chiesto per la preparazione strumentale. Fu lui ad ideare e costruire le apposite camere con i relativi otturatori.

L'Aiuto Dr. T. Nicolini non avendo potuto realizzare un fotometro integrale, come sarebbe stato suo desiderio, per misurare l'intensità istantanea totale della Luna durante il corso del fenomeno, si preoccupò di ottenere una serie di fotografie servendosi dell'obbiettivo dell'equatoriale Dollond, che ha 18 cent. di apertura libera e 300 cm. circa di distanza focale. Ricavò così 16 ottime fotografie, che saranno esse pure utilizzate per ulteriori misure e ricerche.

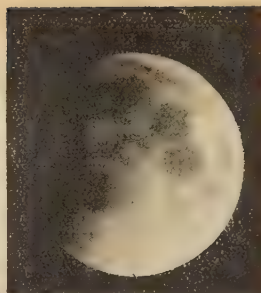
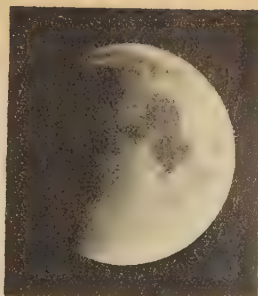
Lo scrivente si limitò invece ad osservazioni dirette del fenomeno, cercando identificare nel modo migliore oltre gli istanti dei contatti quelli in cui l'ombra, procedendo via via sul disco lunare, veniva a toccare punti notevoli della superficie. Le osservazioni vennero fatte mediante un cannocchiale portatile di Fraunhofer dotato di lente di circa 8 cent. di apertura. Gli istanti espressi in T. M. U. delle diverse osservazioni sono i seguenti:

	h	m	s
Primo contatto dell'ombra col disco lunare	2	0	32
Contatto ombra bordo cratere Grimaldi	2	2	3

	h	m	s
Contatto ombra bordo orientale Mare Humorum	2	6	5
Contatto ombra bordo occidentale Mare Humorum	2	10	44
Entrata in ombra del cratere Keplero	2	12	49
Detto del cratere Aristarcus	2	15	28
Contatto ombra bordo orientale cratere Tycho	2	18	12
Detto bordo orientale del cratere Copernicus	2	19	17
Detto bordo occidentale del cratere Tycho , ...	2	20	0
Detto bordo occidentale del cratere Copernicus	2	21	23
Detto estremo orientale Sinus Iridum . , ...	2	26	31
Detto estremo orientale catena Apennini	2	31	33
Detto estremo occidentale del Sinus Iridum	2	32	53
Ombra al centro del cratere Archimedes. . . . , ...	2	34	2
Contatto ombra bordo cratere Aristillus . . . , ...	2	35	36
Detto bordo orientale Mare Serenitatis	2	37	43
Ombra al bordo occidentale del cratere Plato (?)	2	40	31
Contatto ombra bordo occidentale Mare Imbrium	2	45	17
Detto estremità occidentale catena Caucasus	2	46	16
Detto bordo occidentale Mare Serenitatis	2	46	50
Detto bordo orientale Mare Foecunditatis	2	47	29
Detto bordo occidentale Mare Tranquillitatis	2	48	36
Detto bordo orientale Mare Crisium	2	52	30
Detto bordo occidentale Mare Foecunditatis	2	53	4
Detto bordo cratere Oriani (?)	2	55	57
Contatto ombra bordo occidentale Mare Crisium	2	58	5
Principio della totalità	3	0	28

L' ultimo appulso è forse un poco anticipato.

Il fenomeno potè essere osservato attraverso un'atmosfera limpida e trasparente salvo qualche breve istante in cui leggeri veli coprirono la Luna; incominciata la totalità, come già si disse nubi dense ed opache all'orizzonte, impedirono ogni ulteriore osservazione. La colorazione della Luna, che fin dal momento, in cui era entrata nella penombra, aveva assunto un aspetto giallognolo, assunse in sulle prime nella zona coperta dall'ombra la caratteristica colorazione grigio nera, trasformandosi poi in quella cupo-rossastra.

Il prof. Guerrieri, che ha osservato il fenomeno servendosi di un binocolo a forte ingrandimento di Zeiss (6x), riferisce aver notato immagini ottime e precise, con bordo lunare nitido e tranquillo, privo di vibrazioni od oscillazioni; i mari ed i crateri, e specialmente i principali di Ticone, Keplero, Platone ed Aristarco, apparivano in rilievo con contorni ben distinti. A mano a mano che il disco lunare avanzava nell'ombra della Terra, si vedeva per un tratto di circa 25°, dalla parte orientale, un chiarore filiforme di marcata luce verdastra, che risaltava sulla parte oscura

Eclissi totale di Luna del 26 agosto 1942. — Entrata nell' ombra.

Fotografie a posa variata (da 0,5 sec. a 60 sec.) al fuoco del cannocchiale DOLLOND (D = cm. 18, f = cm. 300). Le ore sono di t. m. E. c.

del disco. Subito dopo l'istante dell'inizio della totalità si intravide, ove era scomparsa l'ultima luce, un filetto sottilissimo di luce verdastra, rimasta visibile per circa 30 secondi, e poi scomparso. Nel campo del binocolo era posto bene in rilievo il color rosso mattone della superficie lunare in modo particolare al principio della totalità.

L'ecclisse di Sole del 10 settembre 1942, non poteva avere per noi che un ben scarso interesse e data la piccolissima zona del sole, che sarebbe risultata, per noi, occultata dalla Luna (poco più di due decimi del diametro), e tenuto conto, che proprio l'istante del massimo avrebbe preceduto di pochi minuti l'ora del tramonto del Sole. Tuttavia si dispose per l'osservazione degli istanti del primo contatto del disco lunare col disco del Sole, e per l'esecuzione di una serie di fotografie. Il primo contatto venne osservato dal prof. E. Guerrieri alle ore di T. U. $15^h\ 58^m\ 24^s$, adoperando un binocolo, a forte ingrandimento, di Zeiss. Il prof. T. Nicolini invece osservando all'equatoriale di Fraunhofer fissò l'istante del primo contatto alle $15^h\ 58^m\ 11^s.3$ di T. U.

Il fenomeno venne ancora, come si è detto, fotografato dal prof. Vocca, utilizzando la camera Salmoiraghi, montata sul cannocchiale di Merz (apertura libera di 135 mill. e 2150 mill. di distanza focale) che è unito all'equatoriale di Dollond. Il diametro dell'immagine del Sole nel piano focale era di 21.5 mill.; ma risultava poi ingrandito dal dispositivo della camera fotografica al diametro di 95.5 mill. Le fotografie furono fatte tutte attraverso filtro giallo, a piena apertura dell'obiettivo con tempi di posa crescenti, per tener conto dell'assorbimento crescente col rapido declinare del Sole verso l'orizzonte. Furono usate lastre Ferrania-Cappelli extrarapide. In complesso vennero ottenute 8 negative intervallate di circa 10 minuti una dall'altra a partire da quella delle $15^h\ 58.^m0$ di T. U., fatta nel preciso istante in cui si avvertì il primo contatto. Di più venne pure eseguita una al momento corrispondente alla fase massima. La scomparsa del Sole dietro la collina dei Camaldoli, e la comparsa di nubi basse all'orizzonte impedì la prosecuzione delle osservazioni. Il materiale fotografico raccolto permetterà dalla misura delle corde risalire ad una più precisa e rigorosa determinazione dell'istante del primo contatto.

Capodimonte, 6 novembre 1942-XXI.

Un tipo di curva a curvatura distribuita come la densità della probabilità nella legge normale

Nota di **Tito Nicolini**, *presentata dal socio* **L. Carnera.**

(Adunanza del dì 6 marzo 1943-XXI)

Sunto. — Si considera la curva, passante per l'origine, rappresentata dalle equazioni parametriche (1), dove s è l'arco contato dall'origine, e $\Theta(hs)$ l'integrale di Gauss relativo all'argomento hs. Si ha immediatamente al modo usuale la relazione (2) tra la curvatura e l'arco, e cioè: la curvatura è distribuita rispetto all'arco come la densità della probabilità nella usuale rappresentazione cartesiana della legge normale. Si ha così un'altra rappresentazione geometrica della legge normale, costruibile per punti per mezzo delle tavole dell'integrale di Gauss. L'interesse, non presumendo oltrepassare il campo di una semplice rappresentazione, consiste nell'essere questa intrinseca; inoltre, pur limitandosi qui alla distribuzione normale, il concetto rappresentativo è estensibile a distribuzioni di probabilità di tipi generalizzati, sia per una sia per più variabili.

1). — La legge normale delle probabilità è geometricamente tradotta di solito nella rappresentazione cartesiana della curva a campana. Altra rappresentazione concettuale delle leggi di probabilità in generale, è di considerarle in corrispondenza a distribuzioni di masse su una sbarra (per una variabile). Volendo riferire una ancor diversa rappresentazione geometrica, ricordando la funzione o integrale di Gauss relativo al valore ξ dell'argomento

$$\Theta(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} \, d\xi$$

consideriamo la curva rappresentabile parametricamente rispetto ad assi ortogonali qualsiansi con le equazioni.

$$x = \int_0^s \cos \frac{\Theta(hs)}{2} \, ds \quad , \quad y = \int_0^s \operatorname{sen} \frac{\Theta(hs)}{2} \, ds \qquad (1)$$

$\left(\text{o anche } \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \dfrac{\Theta(hs)}{2}\right)$. Non abbiamo la relazione in termini finiti tra x ed y, ma interessa l'equazione intrinseca della curva, cioè la relazione

tra l'arco variabile s (contato dall'origine, per cui passa la curva) e la curvatura C all'estremo di esso. Applicando al caso il procedimento ordinario, e chiamando α l'angolo di contingenza (tra la tangente all'origine e quella all'estremo dell'arco):

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha = \cos\frac{\Theta(hs)}{2}, \qquad o \qquad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\frac{\Theta(hs)}{2}$$

$$\alpha = \frac{\Theta(hs)}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hs} e^{-h^2 s^2}\, d(hs)$$

(α è espresso in radianti)

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{s} e^{-h^2 s^2}\, ds$$

e derivando per rapporto all'arco

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 s^2}. \tag{2}$$

Questa equazione intrinseca, definisce direttamente la proprietà fondamentale e caratteristica della curva, data inizialmente nella forma (1): la curvatura in ogni punto è uguale all'ordinata della curva normale delle probabilità (riferita ad assi cartesiani qualsiansi, ξ, η)

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \xi^2}$$

corrispondente al punto $\xi = s$; o ancora, la curva normale delle probabilità, qui scritta nella forma comune, è rappresentabile dalla semplice natura intrinseca della curva (1), o (2), indipendentemente da ogni riferimento ad assi cartesiani, intendendo semplicemente che l'ordinata η in ogni punto ξ sia rappresentata dalla curvatura della (1) o (2) al punto $s = \xi$.

Integrando la (2), come vedesi dalle equazioni che la precedono, si ha la contingenza totale per un qualsiasi arco, o angolo tra le tangenti estreme, detto anche curvatura totale; esso corrisponde al concetto di massa delle probabilità, o funzione delle probabilità totali, come la semplice curvatura C corrisponde alla densità η delle probabilità o funzione delle probabilità elementari. E ricordando che $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, si può verificare anche per la (2) la nota proprietà delle distribuzioni di probabilità in generale, che si

può tradurre qui: la curvatura totale tra i valori $-\infty$ e $+\infty$ dell'arco s per la curva (2) è un radiante $= 57^{\circ}.29578$.

2). — La rappresentazione sopra considerata per la legge normale, si può generalizzare; limitiamoci a considerare l'estensione concettuale per le distribuzioni ad una variabile, riportandoci quindi al solo concetto di curvatura piana. Data una legge di probabilità elementare (o massa infinitesima dp), cioè la densità $\varphi(x)$ della probabilità:

$$dp = \varphi(x)\, dx \tag{3}$$

a cui corrisponde la massa o funzione delle probabilità totali

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx$$

si può far corrispondere a questa legge una curva, la cui curvatura in ogni punto (determinato dall'arco s) sia uguale alla ordinata o densità nel punto corrispondente $x = s$ della (3):

$$C = \frac{d\alpha}{ds} = \varphi(s). \tag{4}$$

Ossia l'attuale rappresentazione si ottiene formalmente con una semplice modificazione di simboli

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi(x) \\ C = \varphi(s) \end{array}\right\}.$$

Si noti che la prima di queste equazioni, non è da scambiare con la cartesiana della curva data dalla seconda: si tratta di due curve del tutto diverse, la prima data nel piano cartesiano, la seconda nella sua natura puramente intrinseca.

La nuova rappresentazione presume appunto il solo vantaggio di essere intrinseca, escludendo nel modo più immediato la presenza di elementi estranei (assi coordinati cartesiani).

Nel caso più semplice, un arco di circonferenza rappresenta una distribuzione equiprobabile; l'arco corrisponde in ogni caso ad un radiante, ma la curvatura sarà più o meno accentuata secondochè rispettivamente meno o più ampio sarà l'intervallo di equiprobabilità della variabile; il caso limite è la retta intera o la semiretta.

Pel giuoco equo di testa e croce, con la probabilità $\frac{1}{2}$ di guadagnare

ed $\frac{1}{2}$ di perdere la posta a, si ha la rappresentazione qui disegnata, la più comprensiva. La contingenza totale o angolo tra i lati estremi, è come sempre un radiante; e la probabilità è zero per ogni valore del guadagno s, cioè per ogni valore dell'intervallo della linea designata partente da O, tranne pei due valori $s=a$ ed $s=-a$, pei quali la probabilità (corrispondente all'angolo di contingenza) è finita ed uguale ad $\frac{1}{2}$ (cioè la densità è infinita).

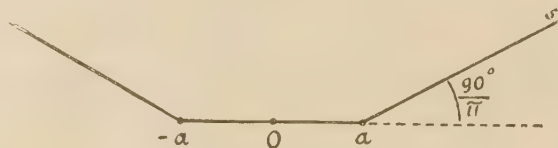



Fig. 1.

La rappresentazione considerata si adatta a tutti i tipi di distribuzioni di masse o densità, come già si vede in particolare dalle discontinuità di quest'ultimo esempio; specificatamente cioè:

1°) masse finite concentrate in certi punti, di discontinuità della funzione di ripartizione $P(x)$, o punti con densità $\varphi(x)$ infinita; essi risulterebbero vertici angolari della rappresentazione intrinseca, come nella figura considerata.

2°) masse ripartite sull'asse con densità lineare $\varphi(x)$, che sarebbero raffigurate da una curva continua; una curva con punti salienti rappresenterebbe una combinazione di questi due tipi, mentre si vede subito che non potrebbero aversi cuspidi.

3°) distribuzioni non rientranti nei tipi precedenti (dette ripartizioni di masse in insiemi di misura nulla, senza che alcun punto contenga massa finita) e che non sembrano avere che un interesse logico [1]).

Tuttavia, non apparendo la convenienza pratica della generalizzazione del concetto, non è qui il caso di tradurre in termini di curvature o di angoli di contingenza le particolarità dei varî tipi di distribuzione. Tanto più che, volendo realizzare per punti a mezzo di coordinate cartesiane la costruzione delle nuove curve, la complicazione analitica è rilevante anche per distribuzioni di tipi comuni. Infatti, data la (4), si ha derivando (rispetto ad x):

$$C' = \varphi'(s) \, . \, s'$$

[1]) Il significato appare subito da un esempio particolare di LEBESGUE; la massa unitaria da distribuire sul segmento AB si distribuisca su due terzi di esso, AM ed NB; per AM ed NB si ripeta la stessa divisione, e così di seguito. Cfr. P. LEVY, *Calcul des probabilités*, p. 145, Gauthier-Villars, Parigi, 1925.

e sostituendo le espressioni

$$C = \frac{y''}{(1+y')^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad s' = \sqrt{1+y'^2}$$

si avrebbe la stessa curva (4) riferita a coordinate cartesiane, ma l'integrazione non è generalmente effettuabile in pratica; ed anche per la semplice distribuzione normale, in mancanza della relazione in termini finiti tra x ed y, si sono date le sole equazioni parametriche (1), utilizzabili per la costruzione al modo che segue.

3). — Resta di un certo interesse almeno la rappresentazione intrinseca della distribuzione normale. L'utilizzazione delle equazioni parametriche (1) è relativamente semplice in quanto il calcolo numerico, e quindi una costruzione per punti, è effettuabile per mezzo della tavola dei valori dell'integrale Θ di GAUSS [2]).

Per le deduzioni numeriche dalle (1) si può procedere come segue, cominciando dal caso $h = 1$. Scelta una successione di valori per l'arco s (p. es. 0.0, 0.10, 0.20, ... unità lineari), si prende dalla tavola di Θ la successione dei valori corrispondenti (in radianti); si passa quindi ai valori cos $\frac{\Theta(s)}{2}$ e sen $\frac{\Theta(s)}{2}$; gli integrali tra i limiti o ed s (la cui valutazione numerica è semplice, essendo sufficiente pei risultati che seguono l'approssimazione dei trapezi) daranno, per ogni valore di s, le coordinate x ed y per una successione di punti della curva da tracciare. La curva é inoltre simmetrica rispetto all'asse y. La costruzione per punti è così relativamente semplice.

Ma anzichè una successione di punti ad intervalli uguali dell'arco s, può esser preferibile una successione per inservalli uguali dell'ascissa x; per ottenerla si ricorre all'interpolazione, ma non è sufficiente la lineare, tranne pei valori elevati di s. Naturalmente, avendo insistito sulla intrinsecità della rappresentazione, gli assi non servono che come mezzo di costruzione grafica.

Si riportano in tabella i risultati a 4 decimali; un maggior numero avrebbe richiesto interpolazioni laboriose, senza particolare utilità.

---

[2]) Una tavola estesa, con 7 decimali fino al valore 3.45 dell'argomento, e 11 decimali poi fino al valore 4.80, si trova nel trattato del BERTRAND, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Parigi 1889.

Tabella I. — *Costruzione per punti della curva intrinsecamente rappresentativa della distribuzione normale con $h = 1$.*

x	y	x	y	x	y	x	y
0.0	0.0000	1.0	0.2556	2.0	0.7768	3.0	1.3229
0.1	0029	1.1	3025	2.1	8314	3.1	3775
0.2	0113	1.2	3516	2.2	8860	3.2	4322
0.3	0253	1.3	4022	2.3	9405	3.3	4868
0.4	0446	1.4	4540	2.4	0.9951	3.4	5414
0.5	0690	1.5	5068	2.5	1.0498	3.5	5961
0.6	0982	1.6	5601	2.6	1044	3.6	6507
0.7	1320	1.7	6140	2.7	1590	3.7	7053
0.8	1698	1.8	6681	2.8	2136	3.8	7599
0.9	0.2112	1.9	0.7224	2.9	1.2683	3.9	8146
						4.0	1.8692

È evidente l'andamento lineare per valori superiori di x.
Per $h \neq 1$ basta eseguire un cambiamento di variabile

$$z = sh \quad , \quad ds = \frac{1}{h}\, dz.$$

Allora le (1) si possono scrivere

$$x = \frac{1}{h}\int_0^{hs} \cos\frac{\Theta(z)}{2}\, dz \quad , \quad y = \frac{1}{h}\int_0^{hs} \operatorname{sen}\frac{\Theta(z)}{2}\, dz.$$

Dunque si può usare la stessa tabella, non riportata, avente per argomento i valori regolarmente susseguentisi dell'arco s; si prendono i valori degli integrali tra i limiti o ed hs, e quindi si dividono i risultati per h. Seguono nella seconda tabella alcuni dati sommari per le curve corrispondenti ai valori 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ di h; sembra inutile eseguire nuove interpolazioni per trasformare ad intervallazione regolare dell'ascissa x.

TABELLA II. — *Dati sommarî analoghi a quelli della* TAB. I. *per valori diversi di h.*

$h = 2$		$h = 0.5$		h 0.2	
x	y	x	y	x	y
0.0000	0 0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2470	0336	0.9880	1346	2.4699	0.3365
4815	1194	1.9261	4776	4.8152	1.1940
7057	2300	2.9113	0.9665	7.0569	2.2999
0.9260	3482	3.7040	1.3926	9.2600	3.4816
1.1455	4678	4.5820	1.8713	11.4550	4.6782
3649	5877	5 4596	2.3506	13.6490	5.8766
5843	7075	6.3372	2.8301	15.8430	7.0751
1.8037	8274	7 2148	3.3095	18 0370	8.2737
2 0231	0.9472	8.0924	3.7889	20.2309	9 4723
2 2425	1.0671	8.9700	4.2683	22.4249	10.6708

Le curve si differenziano a seconda del valore di h al modo seguente: per h grandissimo, $\alpha = \frac{\Theta(hs)}{2}$ si avvicina a 0.5 radianti fin dalla immediata

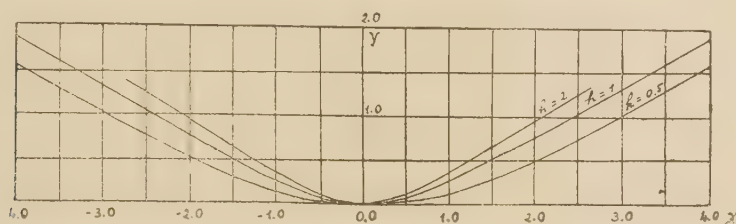



Fig. 2.

prossimità dell'origine; per h piccolissimo invece, α comincia ad avvicinarsi a tale valore assintotico scostandosi dalla direzione dell'asse x solo lontano dall'origine. Un'idea del senso della variazione si può già avere dal grafico annesso (fig. 2).

È possibile estendere il teorema di Cremona sulle curve iperellittiche alle curve di gonalità diversa da due?

Nota del prof. **Federico Amodeo**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 6 marzo 1943-XXI)

Sunto. — Si prendono le mosse dal teorema di Cremona sulle curve iperellittiche per mostrare che per $k \geq 3$ la sua estensione conduce a risultati molto diversi e impreveduti. Una prima estensione molto generica si ottiene col dimostrare che una curva k-gonale per $k \geq 2$ di specie s si può sempre trasformare cremonianamente in una curva di 1^a specie tipica o atipica. Ma poi si passa a precisare in quali tipi di curve di 1^a specie si possono trasformare, ed esaminati i casi particolari di $k = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ si dimostra che nel caso di $k \geq 3$ esse sono trasformabili, non in curve di un ordine solo per ciascun genere, come avviene per le curve iperellittiche, ma in due soli tipi per $k = 3$, per ciascun genere, e per $k > 3$ in $\frac{k}{2} + 1$ tipi se k è pari e $\frac{k+1}{2} + 1$ tipi se k è dispari. Questo risultato, non essendo adattabile alle curve razionali, si cerca la condizione necessaria e sufficiente perchè una curva razionale si trasformi cremonianamente in linea retta.

1. Nelle ricerche sulle curve algebriche in base alla *gonalità* ci troviamo di fronte ad un problema del più alto interesse, che occorre risolvere, poichè da esso dipendono tanti altri problemi di assestamento della teoria generale delle curve algebriche di qualunque *ordine* e di qualunque *genere*, che finora non sono stati affrontati.

Il problema si presenta quando si considera il teorema dimostrato da Cremona nel 1869 [1]), riprodotto poi da Brill e Nöther nel 1873 [2]), enunciato così:

Una curva iperellittica di genere p *si può trasformare sempre birazionalmente in altra curva iperellittica di ordine* p + 2, *provvista di un solo punto* p-*uplo.*

---

[1]) Cremona trattò questo argomento nella Memoria *sulla trasformazione delle curve iperellittiche* (*Opere*, 3, 123-127) dimostrando analiticamente che l'equazione generale delle curve iperellittiche, di genere p, si può trasformare biunivocamente in altra di ordine $p + 2$ con un punto p-uplo soltanto, e poi che ciò si poteva anche ottenere con una trasformazione di de Jonquières. Confermò il tutto con l'altra Memoria: *Intorno al numero dei moduli.*

[2]) Brill e Nöther, *Ueber die algebraische Funktionen und die anwendung in der Geometrie*, Math. Ann. v. 7, 1873, p. 209-310.

Queste curve al variar del genere p, costituiscono appunto le *curve normali* del piano di gonalità due.

Esiste un teorema analogo per qualunque altra curva di *gonalità* diversa da due? Ecco il problema.

E si vedrà che il campo si allarga sopra orizzonti nuovi ed impreveduti .

2. Cominciamo dall' osservare che il suddetto teorema di CREMONA si può far comprensivo anche delle curve *ellittiche* enunciandolo così:

Una curva di gonalità 2 (bigonale, quindi di genere $p \geq 1$) *si può sempre trasformare birazionalmente in una curva dello stesso genere, di ordine* $p + 2$, *provvista di un solo punto* p-*uplo, fatta eccezione per le curve* C_1^3 *per le quali il punto* p-*uplo è semplice e quindi è un punto qualunque delle curve.*

3. Il caso di $k = 3$ è stato già esaminato nella Nota *Il problema della gonalità* [3]. Ivi si è dimostrato che le curve della 3ª, 5ª, 7ª, ... fila del quadro delle curve trigonali (che sono dotate di un punto V^{m-3} $(m-3)$-uplo e di un numere pari di punti doppi) si trasformano cremonianamente in curve della 1ª fila dotate soltanto di un punto V^{m-3}; e che le curve della 4ª, 6ª, 8ª, ... fila (che sono fornite di un punto V^{m-3} e di un numero dispari di punti doppi) si trasformano cremonianamente in curve della 2ª fila che sono dotate di un punto V^{m-3} e di un punto doppio soltanto.

Da ciò si può fin da ora affermare che il problema che ci siamo proposto di esaminare non ha in generale per qualunque valore di k un' unica soluzione, poichè già per $k = 3$ si presenta con una doppia soluzione; *le curve trigonali si possono trasformare cremonianamente in due tipi di curve, che non sono trasformabili l' uno nell' altro.*

4. Per passare al caso generale di $k > 3$ rammentiamo che le curve ${}_kC_p^m$ di *specie* s sono di genere

$$p = \frac{k-1}{2}(2n - ks - 2) - \theta \qquad \left(\text{con } \theta < \frac{k(k-1)}{2}\right)$$

e sono *tipiche* o *atipiche* a seconda che sia $\theta = 0$ o $\theta \neq 0$; dippiù che esse sono trasformabili univocamente in curve C' dello stesso ordine m, con un punto V^{m-k} $(m-k)$-uplo ed $s-1$ punti k-upli se $\theta = 0$; ed invece in curve C' che oltre a qnesti avranno altri punti di multiplicità $k-1$, $k-2$, $k-3, \ldots,$ $\ldots, 3, 2$ se $\theta \neq 0$ [4].

---

[3]) AMODEO, Rend. di qnesta Acc. 7 dic. 1940, § 6, p. 17.

[4]) AMODEO, *Alcune applicazioni del carattere della gonalità delle curve algebriche.* Rend. di questa Acc. 13 giugno 1942, XX, n. 2, *c*).

Cosicchè per trovare la soluzione del problema basterà esaminare soltanto queste curve C' con inviluppi dei gruppi G_k digenerati in s fasci lineari per i diversi valori di k.

5. *a)* Per $k=2$ il genere è dato da

$$p=m-s-1 \quad , \quad \text{oppure l'ordine da} \quad m=p+s+1\,;$$

poichè dovendo essere $\theta < \frac{k(k-1)}{2}$, deve essere <1 e quindi sempre eguale a zero.

Cosicchè *le curve bigonali sono tutte tipiche ed il loro ordine è* m $=$ p $+2$, p $+3$, p $+4,\ldots$ *a seconda che esse siano di 1ª, 2ª, 3ª,... specie.*

Dunque, il quadro delle curve bigonali dato nella Nota [3]) (§ 6, n. **2**) comprende *tutte* le curve bigonali che si possono ottenere con la trasformazione univoca detta nel n. precedente, cioè curve dello stesso ordine della curva primitiva con un punto V^{m-2} $(m-2)$uplo ed altri $s-1$ punti doppi (dei quali due non possono mai essere allineati con V).

b) Per $k=3$ il genere è dato da

$$p=2m-2s-2-\theta \qquad\qquad (\text{con } \theta<3)$$

e quindi con la trasformazione suddetta *ogni curva trigonale si trasforma in curva di eguale ordine provvista di un punto* V^{m-3} (m -3)*uplo, di* s -1 *punti tripli ed eventuali punti doppi.*

Da ciò risulta che il quadro delle curve trigonali assegnato nella Nota [3]) (§ 6, n. **3**), poichè comprende soltanto le curve provviste di punti doppi, dovrebbe essere ampliato di tutte le altre curve trigonali provviste di punti tripli. Ma invece rimane tal quale per le considerazioni che si fanno alla fine del n. **6** seguente.

c) Per $k=4$ con la trasformazione univoca suddetta *le curve tetragonali si trasformano in curve di egual ordine provviste di un punto* V^{m-4} (m -4)*uplo, di* s -1 *punti quadrupli ed eventuali punti tripli e doppi.*

Da ciò risulta che il quadro dato nella Nota [3]) (§ 6, n. **4**), poichè comprende soltanto le curve tetragonali provviste di punti doppi, dovrebbe essere ampliato di tutte le altre curve tetragonali dotate di punti quadrupli e tripli.

E così via per tutti gli altri valori di k.

6. Applichiamo adesso a questo insieme di curve C' di gonalità k le trasformazioni cremoniane, e più agevolmente le successive trasformazioni quadratiche.

Supponiamo che la curva C' (che indicheremo ora con C) abbia un numero pari di punti k-upli. Applichiamo ad essa una tr. q. di punti fonda-

mentali A, B, C; ponendo il punto V in A e i due punti k-upli in B e C, la curva trasformata sarà di ordine

$$2m-(m-k+k+k)=m-k=m'$$

ed avrà nei punti fondamentali A', B', C' punti rispettivamente di multiplicità

$$\begin{aligned} m-(k+k) &= m'-k \\ m-(m-k+k) &= 0 \\ m-(m-k+k) &= 0, \end{aligned}$$

cioè sarà trasformata in una curva di ordine $m-k$ (minore del precedente) con 2 punti k-upli di meno e perciò successivamente si trasformerà in una curva senza punti k-upli.

Qualora invece i punti k-upli fossero in numero dispari, si arriverà ad una curva con un solo punto k-uplo, e se in questo caso è $k-i$ la multiplicità maggiore fra i punti multipli rimasti $(1 \leq i \leq k-1)$ con una tr. q. ponendo V in A, il punto k-uplo in B e il punto $(k-i)$uplo in C si avrà per trasformata una curva di ordine

$$2m-(m-k+k+k-i)=m-(k-i)=m'$$

che avrà in A' B' C' le multiplicità

$$\begin{aligned} m-(k+k-i) &= m'-k \\ m-(m-k+k-i) &= i \\ m-(m-k+k) &= 0, \end{aligned}$$

cioè la trasformata avrà un ordine m' minore del precedente senza punti k-upli e con un punto i-uplo. Dunque:

Qualunque curva k-*gonale di specie* s *tipica o atipica si può trasformare cremonianamente in una curva di 1ª specie tipica o atipica.*

Questo teorema è di importanza grandissima: esso potrebbe ritenersi la più generale estensione del citato teorema di Cremona per tutti i valori di $k>2$ e conferma che per $k>2$ le curve non sono trasformabili in curve di un sol tipo, come per $k=2$, ma in curve di tipi differenti, tutti però appartenenti al tipo di curve di 1ª specie con un punto V^{m-k}, [5]).

Ma questa non è ancora l' ultima espressione a cui può restringersi la cercata estensione, essa non dà un' idea della grande varietà di tipi a cui le curve k-gonali, al crescere di k, si possono ridurre.

---

[5]) Cfr. Amodeo, *Curve* k-*gonali di* s^m *specie.* Atti di questa Acc. 1897, (§ 7 n. 8, p. 20). Ivi avevamo affermato che vi fosse distinzione fra curve di specie pari e specie dispari; ciò ora è eliminato.

Le curve di 1ª specie possono avere punti di multiplicità

$$k-1 \quad , \quad k-2, \ldots, 3, 2,$$

quindi per $k > 3$ possono avere punti di multiplicità > 2, mentre per $k = 3$, le curve ultime a cui si possono ridurre rimangono esclusivamente quelle dei due tipi già assodati nel n. **3**.

7. *a)* Supponiamo che la curva C abbia un numero pari di punti $(k-1)$upli.

Con la solita tr. q., ponendo V in A, e due punti $(k-1)$upli in B e C, essa si trasformerà in altra di ordine

$$2m - (m - k + k - 1 + k - 1) = m - (k-2) = m'$$

ed avrà in A' B' C' le multiplicità

$$\begin{gathered} m - (k - 1 + k - 1) = m' - k \\ m - (m - k + k - 1) = 1 \\ m - (m - k + k - 1) = 1, \end{gathered}$$

cioe la trasformata sarà di ordine minore, se $k > 2$, e priva dei due punti $(k-1)$upli: successivamente si trasformerà in altra priva di punti $(k-1)$upli.

Qualora invece il numero dei punti $(k-1)$upli fosse dispari, si arriverà ad una curva con un solo punto $(k-1)$uplo, e se in questo caso è $(k-i)$ la multiplicità maggiore fra i punti multipli rimasti $(2 \leq i \leq k-2)$, con una tr. q., ponendo V in A, il punto $(k-1)$uplo in B e il punto $(k-i)$uplo in C, si avrà per trasformata una curva di ordine

$$2m - (m - k + k - 1 + k - i) = m - (k - i - 1) = m'$$

ed avrà in A' B' C' le multiplicità

$$\begin{gathered} m - (k - 1 + k - i) = m' - k \\ m - (m - k + k - i) = i \\ m - (m - k + k - 1) = 1, \end{gathered}$$

cioè avrà (oltre V) un punto di multiplicità $i \leq k-2$ ed il punto $(k-1)$*uplo* sparisce. Ma se oltre il punto $(k-1)$uplo la curva non ha altro punto multiplo, ponendo un punto semplice in C, la trasformata sarà di ordine m con un punto $(k-1)$uplo e un punto semplice e quindi identica alla precedente. Cosicchè:

Le curve k-*gonali di 1ª specie (per* $k > 3$) *si possono trasformare cre-*

monianamente in curve prive di punti (k — 1)*upli. eccetto nel caso che la curva avesse, oltre il punto* V^{m-k}, *soltanto un punto* (k — 1)*uplo e nessun altro punto multiplo.*

Con ragionamento analogo si conchiude che:

b) Le curve k*-gonali di 1ª specie possono trasformarsi in curve prive anche di punti* (k — 2)*upli, eccetto quando, oltre il punto* V^{m-k}, *abbiano un solo punto* (k — 2)*uplo od eventuali punti doppi.*

c) Le curve k*-gonali di 1ª specie si possono trasformare in curve prive anche di punti* (k — 3)*upli, eccetto quando, oltre il punto* V^{m-k}, *abbiano un solo punto* (k — 3)*-uplo ed eventuali punti tripli e doppi.*

d) Le curve k*-gonali di 1ª specie si possono trasformare in curve prive anche di punti* (k — i)*upli, eccetto quando, oltre il punto* V^{m-k}, *abbiano un solo punto* (k — i)*uplo ed eventuali punti* i*-upli e di multiplicità minore.*

8. Quando si è affermato nel n. precedente si può meglio concretare nel seguente:

Teor. *Qualora la somma delle multiplicità* a, b, c *dei tre punti di maggiore multiplicità della curva data* C^m *sia eguale al suo ordine* m, *con tr. q. la curva si trasforma in altra identica e quindi non è trasformabile cremonianamente in altra più eemplice* [6]).

Infatti, con la tr. q. $\begin{matrix} A & B & C \\ a & b & c \end{matrix}$ la suddetta curva si trasforma in altra di ordine

$$2m - (a + b + c) = m$$

ed avrà in $A' B' C'$ le multiplicità

$$m - (b + c) = a$$
$$m - (c + a) = b$$
$$m - (a + b) = c$$

e siccome le altre multiplicità restano inalterate la curva si trasforma in altra identica alla prima.

Cosicchè soltanto quando sia $a + b + c > m$ la curva si trasforma in altra più semplice.

Applicando questo teorema alle curve C con punto multiplo V^{m-k} e con un punto $(k - i)$plo e un altro i-uplo la curva si trasforma in altra identica. quindi perchè si possa trasformare in altra di ordine minore, e perciò con più semplici multiplicità, essa deve avere oltre V^{m-k} ed il punto $(k - i)$plo

---

[6]) Questo teorema non è da confondersi con il teor. di Clebsch: *La somma delle multiplicità* $r_1 + r_2 + r_3$ *dei tre punti di multiplicità più elevate di una tr. crem. di ordine* n *è sempre* > n.

almeno un punto $(i+1)$uplo. Perciò la curva C che ha un punto $k-1)$uplo lo perde se ha almeno un punto doppio; quella che ha un punto $(k-2)$uplo lo perde se ha almeno un punto triplo; quella che ha un punto $(k-3)$uplo lo perde se ha almeno un punto quadruplo; e così di seguito.

Per poter ottenere che la curva si trasformi in altra di ordine minore (posto $m-k$ in lusgo di a) deve essere $m-k+b+c \geq m+1$, e quindi $b+c \geq k+1$.

Quando k è pari $=2q$ i punti di multiplicità b e c possono differire almeno di una unità, quindi $b+b-1 \geq 2q+1$ e quindi $b \geq q+1$; quando k è dispari $=2q+1$, i punti di multiplicità b e c possono essere eguali e quindi $2b \geq 2q+2$, $b \geq q+1$.

Perciò sempre in ogni caso i punti che possono sparire sono quelli di multiplicità $\geq q+1$.

Così, per $k=20$ o 21, sempre possono sparire i punti di multiplicità 20, 19, 18, ... 11.

9. Riprendiamo ora i valori particolari di k, 4, 5, 6. 7.

Per $k=4$, le curve hanno per aggiunte minime le C^{m-5} ed hanno 3 serie canoniche, segate dalle curve agg. C^{m-3}, C^{m-4}, C^{m-5} delle quali i valori dei numeri ρ sono [7])

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = s-1 \quad , \quad \rho_2 = 3(s-1)+h_3 .$$

Ma queste si possouo trasformare in curve di 1ª specie, quindi le sovrabbondanze si riducono a

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 \quad , \quad \rho_2 = h_3 .$$

Queste si possono trasformare anche in curve prive di punti tripli e si perviene alle curve con sovrabbondanze $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$ che sono tutte curve *normali* pel piano e posseggono soltanto un punto V^{m-k} ed eventuali punti doppi. Sono queste le curve del quadro delle p. 23 della Nota [3]) le quali con la tr. q. $\begin{matrix} A & B & C \\ V & 2 & 2 \end{matrix}$ si trasformano in se, con la tr. q. $\begin{matrix} A & B & C \\ V & 2 & 1 \end{matrix}$ o $\begin{matrix} A & B & C \\ V & 2 & 0 \end{matrix}$ o $\begin{matrix} A & B & C \\ V & 1 & 1 \end{matrix}$, si trasformano i curve di ordine più elevate e con più complicate multiplicità.

Però fauno eccezione quelle che hanno soltanto un punto triplo e nessun punto doppio, le quali con la tr. q. $\begin{matrix} A & B & C \\ V & 3 & 1 \end{matrix}$ si trasformano in sè e con la tr. q. $\begin{matrix} A & B & C \\ V & 3 & 0 \end{matrix}$ si trasformano in altre di ordine maggiore.

[7]) Cfr. Amodeo, *Caratteri delle serie canoniche delle curve k-gonali e serie residue relative* (questi Rend. febbraio 1913).

Queste curve sono quelle della 4ª fila del quadro su indicato

$$C^{8}_{12} \;,\; C^{9}_{13} \;,\; C^{10}_{14} \;,\; C^{11}_{15} \ldots$$

però con un punto triplo, invece che con 3 punti doppi; esse hanno $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$ e non sono curve normali pel piano.

Cosicchè possiamo enunciare:

Tutte le curve di gonalità 4 si possono trasformare cremonianamente in curve di 1ª specie tipiche (soltanto con V^{m-4}) *o atipiche* (con V e con 1 o 2 o più punti doppi), *oppure in curve che abbiano soltanto un punto triplo* (oltre V), cioè senza altri punti doppi.

Avvertiamo di volo che ogni curva del quadro suddetto con la tr. q. $\begin{matrix} A\,B\,C\ldots\ldots \\ V\,2\,2\,2\,2\,2\ldots \end{matrix}$ si trasforma in sè, e che se due punti doppi sono allineati con V su AB o su AC la trasformata avrà in A' il punto V' e in B o in C un punto cuspidale.

10. Per $k = 5$, le curve C^m_p pentagonali hanno per curve agg. minime le C^{m-6} ed hanno quattro serie canoniche segate dalle curve agg. C^{m-3}, C^{m-4}, C^{m-5}, C^{m-6}, delle quali i valori dei numeri ρ sono

$$\rho_0 = 0 \;,\; \rho_1 = s-1 \;,\; \rho_2 = 3(s-1) + h_4 \;,\; \rho_3 = 6(s-1) + 3h_4 + h_3 .$$

Ma queste si possono trasformare in curve di 1ª specie, quindi le sovrabbondanze si riducono a

$$\rho_0 = 0 \;,\; \rho_1 = 0 \;,\; \rho_2 = h_4 \;,\; \rho_3 = 3h_4 + h_3 .$$

Queste si possono trasformare anche in curve prive di punti quadrupli ed allora anche $\rho_2 = 0$ e $\rho_3 = h_3$, eccetto quando esse possedessero 1 solo punto quadruplo, per le quali

$$\rho_0 = 0 \;,\; \rho_1 = 0 \;,\; \rho_2 = 1 \;,\; \rho_3 = 3.$$

Queste curve eccezionali sono quelle della 7ª fila del quadro della p. 24 della Nota [3])

$$C^{12}_{28} \;,\; C^{13}_{32} \;,\; C^{14}_{36} \;,\; C^{15}_{40} \;,\; C^{16}_{44} \ldots$$

ma con un punto quadruplo, invece che con 6 punti doppi.

Pel teor. **7**, *b*) le curve pentagonali di 1ª specie si possono anche trasformare in altre prive di punti tripli, e per esse sarà pure $\rho_3 = 0$; fanno eccezione le curve che hanno un solo punto triplo con punti doppi, per le quali sarà $\rho_3 = 1$.

Questo caso eccezionale è rappresentato dalle curve della 4ª fila del quadro

$$C^7_{11} \quad , \quad C^8_{15} \quad , \quad C^9_{19} \quad , \quad C^{10}_{23}, \ldots$$

ma con un punto triplo, invece di 3 punti doppi (oltre V^{m-5}) e quindi con $\rho_3 = 1$, e anche dalle curve delle altre file successive con un punto triplo sostituito a 3 punti doppi.

Cosicchè possiamo enunciare:

Tutte le curve di gonalità 5 si possono trasformare cremonianamente in curve di 1ª specie tipiche (soltanto con V^{m-5}) *o atipiche (con punto* V^{m-5} *e uno o più punti doppi); oppure in curve provviste di un solo punto quadruplo* (oltre V^{m-5}); *oppure in curve che hanno un solo punto triplo e punti doppi.*

11. Per $k = 6$, le curve C^m_p seigonali hanno per curve aggiunte minime le C^{m-7} ed hanno 5 serie canoniche segate dalle curve agg. C^{m-3}, C^{m-4}, C^{m-5}, C^{m-6}, C^{m-7} delle quali i valori dei numeri ρ sono

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = s-1 \quad , \quad \rho_2 = 3(s-1) + h_5 \quad , \quad \rho_3 = 6(s-1) + 3h_5 + h_4 \quad ,$$

$$\rho_4 = 10(s-1) + 6h_5 + 3h_4 + h_3 .$$

Ma queste si possono trasformare in curve di 1ª specie e per esse le sovrabbondanze si riducono a

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 \quad , \quad \rho_2 = h_5 \quad , \quad \rho_3 = 3h_5 + h_4 \quad , \quad \rho_4 = 6h_5 + 3h_4 + h_3 .$$

Queste si possono trasformare anche in curve prive di punti quintupli ed allora anche $\rho_2 = 0$ e

$$\rho_3 = h_4 \quad , \quad \rho_4 = 3h_4 + h_3 ,$$

eccetto quando esse posseggono 1 solo punto quintuplo (oltre V per le quali

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 \quad , \quad \rho_2 = 1 \quad , \quad \rho_3 = 3 \quad , \quad \rho_4 = 6.$$

Tali sono le curve della 11ª fila del quadro della p. 24, cioè le curve

$$C^{17}_{35} \quad , \quad C^{18}_{40} \quad , \quad C^{19}_{45} \quad , \quad C^{20}_{50} \quad , \quad C^{21}_{55} \ldots .$$

ma con un punto quintuplo invece che con 10 punti doppi.

Pel teor. 7, *c*, le curve seigonali di 1ª specie si possono anche trasformare in altre prive anche dei punti quadrupli e per esse

$$\rho_0 = 0 \quad , \quad \rho_1 = 0 \quad , \quad \rho_2 = 0 \quad , \quad \rho_3 = 0 \quad , \quad \rho_4 = h_3$$

ad eccezione di quelle che hanno soltanto un punto quadruplo ed eventuali punti doppi e queste sono le curve

$$C^{13}_{39}\ ,\ C^{14}_{44}\ ,\ C^{15}_{49}\ ,\ C^{16}_{54},\ldots$$

della 7ª fila del quadro e le altre seguenti quando acquistassero un punto quadruplo in luogo di 6 punti doppi.

Non possono infine le curve seigonali perdere i punti tripli, perchè se ne posseggono uno con 1 o più punti doppi si trasformano in altre di ordine maggiore, e se ne posseggono due o più si trasformano in sè.

Cosicchè possiamo conchiudere:

Tutte le curve di gonalità 6 si possono trasformare cremonianamente in curve di 1ª specie con un punto V^{m-6} *e 0, 1, 2, ... punti doppi; oppure in curve provviste di un solo punto quintuplo* (oltre V^{m-6}): *oppure in curve dotate di un punto quadruplo* (oltre V^{m-6}), *e punti doppi; oppure in curve dotate di due o più punti tripli ed eventuali punti doppi.*

12. Per $k=7$, le curve settegonali hanno per curve aggiunte minime le C^{m-8} ed hanno sei serie canoniche.

Esse possono trasformarsi cremonianamente in curve di 1ª specie con un punto V^{m-7} *e 0, 1, 2, 3 ... punti doppi; oppure in curve che posseggono oltre il punto* V^{m-7} *soltanto un punto sestuplo; oppure in curve che posseggono oltre* V^{m-7} *un solo punto quintuplo e altri punti doppi; oppure in curve che posseggono oltre* V^{m-7} *un solo punto quadruplo e altri punti tripli e doppi.*

13. In generale

Le curve di gonalità $k=\begin{cases}2q\\2q+1\end{cases}$ *si possono trasformare cremonianamente in curve di 1ª specie che abbiano, oltre il punto* V^{m-k} *di multiplicità* $m-k$, *0, 1, 2, 3 ... punti doppi e queste sono tutte curve normali del piano se due punti doppi non sono allineati con* V^{m-k}; *oppure in curve che abbiano oltre il punto* V^{m-k} *un punto* $(k-1)$*-uplo e soltanto punti semplici,*
» » » » » $(k-2)$*-uplo e punti doppi,*
» » » » » $(k-3)$*-uplo e punti tripli e doppi,*
. . . .
e per k *pari, oltre il punto* V^{m-k}, *2 o più punti* q*-upli e altri di multiplicità minore;*
e per k *dispari, oltre il punto* V^{m-k}, *un punto* $(q+1)$*-uplo e punti* q*-upli e di multiplicità minore.*

Con ciò il numero dei tipi a cui si possono ridurre le curve di gonalità $k>3$, sono

$$\frac{k}{2}+1 \text{ se } k \text{ è pari}$$

e

$$\frac{k+1}{2}+1 \text{ se } k \text{ è dispari.}$$

Per es. le curve di gonalità 100 si riducono a 51 tipi
» » » » 101 » » a 52 tipi.

Una rivelazione impreveduta che risulta dalle riflessioni precedenti è questa: Le curve *normali del piano* non si limitano soltanto a quelle da noi assegnate col teor. del § 6 n. 9 della Nota [3]), ma si estendono a tutte le curve del primo tipo qui considerato. Quelle da noi date colla Nota [3]) sono fra tutte le curve quelle che hanno il minimo ordine nel loro genere.

14. Questo teorema è una vera rivelazione impreveduta; la sua portata è tanto vasta da far intendere che esso più che una tappa definitiva debba essere il preambulo di ciò che dovrà venir fuori dallo studio delle curve algebriche in base alla gonalità e necessariamente dallo studio delle superficie algebriche, quando esso si potrà giovare di queste conoscenze.

Intanto esso già mostra che le curve iperellittiche, che molti geometri hanno ritenute essere le sole degne di studio, non sono affatto le più interessanti, ma le più facili ad essere studiate, dopo la creazione degli integrali abeliani.

15. Le curve razionali ($k = 1$) sfuggono alla classifica in specie diverse, per la mancanza degli inviluppi delle rette che contengono i gruppi G_1 e quindi non rientrano nel teorema ora enunciato. Per esse abbiamo già fatto vedere, nella Nota [4]), che, se sono dotate di un punto V^{m-1} di multiplicità $(m-1)$, sono trasformabili cremonianamente in rette, altri casi possono presentarsi per tale possibilità.

Difatti pel teorema del n. **6** sempre che i punti di maggiore multiplicità della curva C_0^m hanno una somma maggiore di m la curva si trasforma in altra di ordine minore; quindi *condizione necessaria* perchè la curva razionale si possa trasformare in retta è che sia $a + b + c > m$, con $a + b \leq m < a + b + c$, e a questa condizione soddisfa il caso già considerato delle curve provviste di un punto V^{m-1}.

Ma questa condizione non è *sufficiente*, perchè nel passare dalla curva C_0^m alla sua trasformata di ordine $m' = m - x$, dovendo i numeri a', b', c' della trasformata ottenersi colla diminuzione di x unità da ciascuno dei corrispondenti numeri a, b, c, può risultare $a' + b' + c' \leq m'$ e quindi, se non ci sono altri punti multipli estranei ai punti fondamentali di multiplicità maggiore, la trasformazione può mancare.

16. Esaminiamo intanto ciò che succede per le curve C_0^3, C_0^4, C_0^5, C_0^6.

La C_0^3 con le multiplicità 2, 1, 1 si trasforma in C_0^2 e quindi in retta.

La C_0^4 » » » 2, 2, 2 » » » C_0^2 e » » »

La C_0^5 con le multiplicità 2, 2, 2 si trasforma in C_0^4 e quindi in retta, oppure con 3, 2, 2 si trasforma in C_0^3 e quindi in retta.

La C_0^6 con le multiplicità 3, 2, 2 si trasforma in C_0^5 e quindi in retta e lo stesso avviene per punti di multiplicità maggiore; ma con 2, 2, 2 si trasforma in altra identica e quindi non si trasforma in retta.

Dunque la C_0^6 con 10 punti doppi non si trasforma in retta mentre con qualunque altra multiplicità la trasformazione avviene, e le curve di ordine minore sempre si trasformano in rette.

Risulta da ciò che la *condizione sufficiente* perchè una curva C_0^m si trasformi in retta è la seguente, [8]):

Si trasformi la curva data con trasformazioni cremoniane o con successive trasformazioni quadratiche in altre di ordini minori, se si perviene ad una curva di ordine ≤ 5, oppure ad una curva di ordine 6 con almeno un punto di multiplicità > 2, la curva è trasformabile in retta, in altri casi non lo è.

Prendiamo ad esempio ad esaminare se le curve

C_0^{16} con le multiplicità 8 8 8 4 3 3 e 9 punti deppi

e

C_0^{16} » » » 8 8 8 4 4 3 e 6 punti doppi

siano o non trasformabili in rette.

1° Applichiamo alla prima la tr. q. $\frac{ABC}{8\,8\,8}$; la curva si trasforma in altra di ordine $2 \times 16 - 24 = 8$ con punti multipli diminuiti di 8 unità, quindi nella C_0^8 con 4 3 3 e 9 punti doppi. Questa con la tr. q. $\frac{ABC}{4\,3\,3}$ si trasforma in altra di ordine $2 \times 8 - 10 = 6$ con punti multipli diminuiti di 2 unità, quindi nella curva C_0^6 con 10 punti doppi. Perciò essa non è trasformabile in retta.

2° Applicando invece alla seconda curva la tr. q. $\frac{ABC}{8\,8\,8}$, la curva si trasforma in altra di ordine 8 con le multiplicità 4 4 3 e 6 punti doppi. Questa con la tr. q. $\frac{ABC}{4\,4\,3}$ si trasforma in altra di ordine 5 con 6 punti doppi, quindi è trasformabile in retta.

Gragnano, dicembre 1942 - XXI.

---

[8]) Cfr. pure Amodeo, l. c. [4]) n. 12.

La varietà W_4^6 dell' S_8 complesso riemanniana del piano biduale

Nota del socio **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 1. maggio 1943 - XXI)

Sunto. — Si caratterizzano nell' S_8 complesso la congruenza lineare di rette ed il sistema lineare di iperquadriche invarianti rispetto al sistema lineare di proiettività formanti gruppo determinato dall' algebra dei numeri biduali, e si studia la varietà quadridimensionale, dell' S_8 complesso, riemanniana del piano biduale.

1. Il I.° Teorema fondamentale.

Da un terema generale dimostrato in un lavoro pubblicato in questo stesso volume dei Rendiconti di questa Reale Accademia di Napoli, si ricava, in particolare, il seguente

Teorema. *L' algebra dei numeri biduali determina nell' S_5 complesso un sistema lineare di proiettività a 2 parametri omogenei, formanti gruppo,* E_1. *Le matrici dei coefficienti delle proiettività di* R_1 *sono del tipo*

$$(M) = \begin{Vmatrix} M & O & O \\ O & M & O \\ O & O & M \end{Vmatrix}$$

essendo M *la trasposta della matrice sinistra dell' elemento corrente nell' algebra dei numeri diduali e* O *la matrice quadrata nulla di ordine 2.*

Le varietà invarianti minime di R_1 *generate dai punti generici di* S_5 *costituiscono una congruenza lineare* (S_1) *di rette che ci forniscono una rappresentazione in* S_8 *del piano biduale.*

2. Caratterizzazione del gruppo R_1.

Nel gruppo R_1 coincidono i due gruppi *reciproco* ed *equivalente*, determinati da un' algebra. La coincidenza di tali gruppi è conseguenza della commutatività dell' algebra dei numeri biduali.

Se indichiamo con u ed ε le due unità dell' algebra in questione, un numero biduale $x = au + b\varepsilon$ ha la matrice sinistra (o destra)

$$\mu'_x = \begin{matrix} a & b \\ O & a \end{matrix} .$$

Ne segue che le matrici dei coefficienti delle proiettività del gruppo R_1 sono del tipo:

$$(1) \qquad (M) = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a \end{Vmatrix}$$

con i parametri omogenei a e b variabili nel corpo dei numeri complessi.

L'equazione caratteristica di (M) è

$$(2) \qquad (a - p)^6 = 0$$

che ammette la radice sestupla $a = p$ alla quale risponde nell' S_5, dove si considerano le coordinate correnti proiettive omogenee $(z_1, z_2, \ldots, z_6)$, il piano di punti uniti di equazioni $z_1 = 0$, $z_3 = 0$, $z_5 = 0$, cioè il piano π congiungente i vertici A_2, A_4, A_6 della piramide fondamentale. Abbiamo dunque:

La proiettività del gruppo R_1 *ammettono come unico spazio di punti uniti il piano* π.

La proiettività di matrice (M) porta il punto $Z(z_j)$ di S_5 nel punto $Z'(az_1, bz_1 + az_2, az_3, bz_3 + az_4, az_5, bz_5 + az_6)$. Al variare della proiettività nel gruppo R_1, cioè al variare dei parametri a e b, il punto Z' descrive la retta $z = Z_1Z$ essendo Z_1 il punto di π di coordinate (O, z_1, O, z_3, O, z_5), e quindi la retta $z = Z_1Z$ è la varietà invariante minima di R_1 passante per il punto Z generico di S_5. Il punto Z_1, (e quindi la retta z), è indeterminata quando e solo quando il punto Z ha la prima, terza e quinta coordinata nulla, cioè quando appartiene al piano π. Viceversa fissato in π un punto $Z_1(O, \alpha, O, \beta, O, \gamma)$ i punti Z di S_5, fuori di π, il cui punto omologo Z' determina con Z una retta z passante per Z_1, sono tutti e solo i punti aventi la prima, terza e quinta coordinata proporzionali ad α, β, γ. Tali punti Z riempiono pertanto l' S_3 di equazioni

$$(3) \qquad \frac{z_1}{\alpha} = \frac{z_3}{\beta} = \frac{z_5}{\gamma}$$

cioè di equazioni

$$(3') \qquad \alpha z_3 - \beta z_1 = 0 \quad , \quad \alpha z_5 - \gamma z_1 = 0 \quad , \quad \beta z_5 - \gamma z_1 = 0 .$$

Detto S_3 passa pertanto per π, essendo questo di equazioni $z_1 = z_3 = z_5 = 0$.

Se nella stella di S_3 di vertice π, stella che indicheremo con (π), assu-

miamo come coordinate di S_3 i tre numeri non tutti nulli (α, β, γ), definiti a meno di un fattore, e nel piano π assumiamo come coordinate del punto $Z_1(O, \alpha, O, \beta, O, \gamma)$ i tre numeri α, β, γ la corrispondenza che porta il punto Z_1 di π nell'S_3 di (π) di equazioni (3), è rappresentata dall'eguaglianza delle coordinate e quindi è una proiettività; che indicheremo con σ. Risulta perciò: *Le rette invarianti minime del gruppo* R_1 *sono tutte e sole le rette di* S_5 *appoggiate al piano* π *e giacenti nell'* S_3 *omologo, nella proiettività* σ, *del punto* Z_1 *di appoggio.*

3. La congruenza (S_1) immagine del piano biduale

Da quanto abbiamo detto nel n. 2 e per il teorema del n. 1 risulta che la congruenza di rette di S_5 che rappresenta il piano biduale e costituita dalle rette appoggiate a π e giacenti nell' S_3 omologo, nella proiettività σ, del punto Z_1 di appoggio. Per un punto generico Z di S_5 passa una ed una sola retta di (S_1), cioè la congruenza è lineare. Se $X(\lambda, \mu, \nu)$ è un punto del piano biduale, con λ, μ, ν, non tutti nulli nè divisori dello zero, e definiti a meno di un fattore non nullo nè divisore dello zero, posto

$$\lambda = z_1 u + z_2 \varepsilon \quad , \quad \mu = z_3 u + z_4 \varepsilon \quad , \quad \nu = z_5 u + z_6 \varepsilon ,$$

la matrice $O'x = \| \mu'_\lambda \; \mu'_\mu \; \mu'_\nu \|$ composta in orizzontali con le matrici sinistre dei numeri biduali λ, μ, ν, cioè la matrice

$$O'x = \begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ O & z_1 & O & z_3 & O & z_5 \end{Vmatrix} . \qquad (4)$$

determina in S_5 la retta $z = Z_1 Z$ della congruenza immagine del punto X, quale congiungente i punti Z_1 e Z aventi per coordinate, rispettivamente, la seconda e la prima riga della matrice (4), matrice che risulta di caratteristica 2, (come deve essere per definizione di spazio ipercomplesso di prima specie legato ad un'algebra), perchè i tre numeri z_1, z_3, z_5 non sono tutti nulli dato che λ, μ, ν, non sono tutti nulli, nè divisori dello zero.

Si osservi che le rette della congruenza uscenti da uno stesso punto Z_1 del piano π costituiscono la stella di rette dell' S_3 di (π) omologo di Z_1 nella proiettività σ, dalla quale bisogna escludere le rette poste nel piano π, perchè essendo z_1, z_3, z_5 non tutti nulli, il punto Z non appartiene al piano π. *I punti singolari della congruenza sono tutti e soli i punti del piano* π.

4. Il sistema lineare di iperquadriche di S_5 composto mediante la congruenza (S_1).

Da un teorema del lavoro a cui si è accennato nel n. 1, si ricava, in particolare che:

Le rette della congruenza (S_1), *immagine del piano bicomplesso, appoggiate ad un* S_3 *di* S_5 *costituiscono una iperquadrica la cui equazione si ottiene eguagliando a zero il determinante di ordine 6 avente per prime due righe la matrice* $O'x$ *e per rimanenti righe le coordinate di quattro punti indipendenti di* S_3.

Le iperquadriche che così si ottengono hanno, pertanto, la equazione combinazione lineare dei minori di ordine 2 estratti dalla matrice $O'x$ data dalla (4), cioè sono del tipo:

$$(5)\qquad \lambda_{11}z_1^2+\lambda_{33}z_3^2+\lambda_{55}z_5^2+2\lambda_{13}z_1z_3+2\lambda_{15}z_1z_5+2\lambda_{35}z_3z_5+$$
$$+2\lambda_{24}(z_1z_4-z_2z_3)+2\lambda_{26}(z_1z_6-z_2z_5)+2\lambda_{46}(z_3z_6-z_4z_5)=0.$$

Tali iperquadriche costituiscono un sistema lineare, di dimensione 8, che indicheremo con *(V)*. Ogni iperquadrica V_4^2 di questo sistema *(V)* passa per il piano π, a cui si appoggiano tutte le rette della congruenza (S_1). Ciò risulta dalla definizione stessa delle quadriche di *(V)*, oppure osservando che per $z_1=z_3=z_5=0$ (equazioni di π) la (5) è soddisfatta, qualunque siano le λ.

L'iperpiano tangente alla V_4^2 di equazione (5) nel punto $Z_1(O, \alpha, O, \beta, O, \gamma)$ del piano π ha l'equazione

$$(6)\qquad (\lambda_{24}\beta+\lambda_{26}\gamma)z_1+(-\lambda_{24}\alpha+\lambda_{46}\gamma)z_3+(-\lambda_{26}\alpha-\lambda_{46}\beta)z_5=0$$

che è soddisfatta, qualunque siano le λ, dai valori $z_1=\alpha$, $z_3=\beta$, $z_5=\gamma$, e quindi tale iperpiano contiene l'S_3 della stella (π) omologo di Z_1 nella proiettività σ, di equazione (3) o (3'), perchè tanto l'iperpiano quanto l'S_3 contengono, oltre π, il punto $Z_2(\alpha, O, \beta, O, \gamma, O)$ del piano π' di equazioni $z_2=z_4=z_6=0$. Viceversa un'iperquadrica di S_5 che debba passare per π e che in ciascun punto $Z_1(O, \alpha, O, \beta, O, \gamma)$ debba avere l'iperpiano tangente passante per il punto $Z_2(\alpha, O, \beta, O, \gamma, O)$ ha l'equazione del tipo (5). Dunque:

Le iperquadriche del sistema lineare (V) *sono tutte e sole le iperquadriche dell'* S_5 *passanti per il piano* π *ed aventi in ciascun punto* Z_1 *di questo piano l'iperpiano tangente passante per l'* S_3 *della stella* (π) *omologo di* Z_1 *nella proiettività* σ. *La dimensione del sistema* (V) *è 8.*

Si osservi esplicitamente che *ogni retta* z *della congruenza* (S_1) *è tangente (o, in particolare, appartiene) a ciascuna iperquadrica del sistema* (V), *nel punto* Z_1 *di appoggio con* π, perchè se z ha in comune con una tale iperquadrica un punto Z distinto da Z_1, essendo la iperquadrica composta di rette della congruenza ed essendo questa lineare, non può z che coincidere con l'unica retta della congruenza passante per Z, retta che appartiene all'iperquadrica perchè questa contiene Z.

Dimostriamo ora che *la iperquadrica generica del sistema* (V) *è un cono col vertice posto nel piano* π. Infatti la iperquadrica V_4^2 riempita dalle

rette della congruenza (S_1) appoggiate ad un S'_3 contiene come doppio il punto Z'_1 di π intersezione con S'_3, dato che una generica retta dell' S_4 passante per Z_1 non può secare la V_4^2 fuori di Z'_1 perchè le rette della congruenza appoggiate a tale retta, fuori di Z'_1, appartengono ad un fascio (avente per centro il punto di π che ha per omologo in σ l' S_3 congiungente la retta con π), il cui piano sostegno ha in comune con l' S'_3 il solo punto Z'_1. Si osservi inoltre che la V_4^2 non può avere alcun punto doppio fuori di π perchè per un tale punto passa una sola retta della congruenza. Si osservi che il punto doppio della iperquadrica di equazione (5) è il punto $Z_1(O, \lambda_{46}, O, -\lambda_{26}, O, \lambda_{24})$ infatti l'iperpiano tangente alla V_4^2 in tale punto, che si ottiene dalla (6) per $\alpha=\lambda_{46}$, $\beta=-\lambda_{26}$, $\gamma=\lambda_{24}$, risulta indeterminato. È notevole il tipo del determinante formato con i coefficienti della (5); esso è precisamente del tipo:

$$\begin{vmatrix} a & O & b & c & d & e \\ O & O & -c & O & -c & O \\ b & -c & f & O & g & h \\ c & O & O & O & -h & O \\ d & -e & g & -h & i & O \\ e & O & h & O & O & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & -c & -e \\ c & O & -h \\ e & h & O \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} O & c & e \\ -c & O & h \\ -e & -h & O \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Il determinante è sviluppato secondo i minori estratti dalle righe 2ª, 4ª e 6ª

5. Equazioni parametriche della riemanniana del piano biduale.

Mettendo, con il solito metodo, in corrispondenza proiettiva le iperquadriche del sistema lineare $\infty^8(V)$ con gl'iperpiani di un S'_8, ad ogni retta z della congruenza (S_1) si viene a fare corrispondere un punto Z' di S'_8 e precisamente se $Z(z_1, \ldots, z_6)$ è un punto di S_5, fuori del piano π, alla retta z della congruenza passante per Z corrisponde il punto $Z'(z'_1, \ldots, z'_9)$ di S'_8 con le coordinate date da:

$$(8) \qquad \begin{cases} z'_1 = z_1^2, \quad z'_2 = z_3^2, \quad z'_3 = z_5^2, \quad z'_4 = z_1 z_3, \quad z'_5 = z_1 z_5, \quad z'_6 = z_3 z_5, \\ z'_7 = z_1 z_4 - z_2 z_3, \quad z'_8 = z_1 z_6 - z_2 z_5, \quad z'_9 = z_3 z_6 - z_4 z_5. \end{cases}$$

Le (8) sono le equazioni parametriche, con i 6 parametri sovrabbondanti ed omogenei z_j di una varietà W dell' S'_8. Ad ogni retta z della congruenza corrisponde un determinato punto Z' di W che si ottiene dalle (8) sostituendo nelle z_i le coordinate di un qualunque punto di z distinto dal punto Z_1 con cui z si appoggia al piano π. Ciò equivale a supporre che le tre coordinate z_1, z_3, z_5 di Z non devono essere tutte nulle. Si osservi che per $z_1 = z_3 = z_5 = 0$ per le (8) si annullano tutte le z' e quindi il corrispondente punto Z' del W risulta indeterminato.

Esclusi dalla W questi punti si ottiene la riemanniana del piano biduale, perchè in essa si rappresentano, senza eccezioni, le rette della congruenza (S_1) e quindi i punti del piano biduale. Detta riemanniana sarà anche indicata con W'. Dunque:

Le equazioni parametriche della riemanniana W' *del piano biduale, di dimensione complessa 4, con i sei parametri omogenei sovrabbondanti* z_i *sono date dalle* (8), *con la condizione che i tre parametri* z_1, z_3 e z_5 *non siano tutti nulli.*

La corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, che nasce fra la congruenza di rette (S_1) *di* S_5 *e la riemanniana* W', *chiamando corrispondenti una retta* z *di* (S_1) *ed un punto* Z' *di* W', *che siano immagini di uno stesso punto del piano biduale, è tale che alle sezioni iperpiane di* W' *rispondono le iperquadriche del sistema lineare* (V), *composto mediante la congruenza* (S_1).

6. Terza rappresentazione complessa del piano biduale.

Seguendo il metodo generale indicato nel terzo teorema fondamentale della memoria citata, si può avere una terza rappresentazione del piano biduale, però con eccezioni, in un S_4 complesso, intersecando la congruenza di rette (S_1) di S_5 con un iperpiano non passante per il piano π (a cui si appoggiano tutte le rette della congruenza). Avremo così in tale iperpiano S_4 la rappresentazione della congruenza assumendo come immagine di una retta z della congruenza il punto in cui questa seca S_4. Conseguentemente avremo in S_4 anche la rappresentazione del piano biduale, o della sua riemanniana W'. Le sezioni iperpiane della W risponderanno alle iperquadriche di S_4 sezioni delle iperquadriche del sistema lineare *(V)*.

Essendo π il piano congiungente i punti A_2, A_4 e A_6, come iperpiano S_4 non passante per π, possiamo scegliere l'S'_4 di equazione $z_6 = 0$, intersecante π nella retta $r = A_2 A_4$. Ponendo nelle (8) $z_6 = 0$ si otterranno, pertanto, le equazioni parametriche della varietà W' con i cinque parametri omogenei $z_1, \ldots, z_5$. Conseguentemente si ha:

Le equazioni parametriche della riemanniana W' *del piano biduale, con i 5 parametri omogenei* $z_1, \ldots, z_5$, *sono:*

$$(8') \qquad \begin{gathered} z'_1 = z_1^2 \,, \quad z'_2 = z_3^2 \,, \quad z'_3 = z_5^2 \,, \quad z'_4 = z_1 z_3 \,, \quad z'_5 = z_1 z_5 \,, \quad z'_6 = z_3 z_5 \,, \\ z'_7 = z_1 z_4 - z_2 z_3 \,, \quad z'_8 = -z_2 z_5 \,, \quad z'_9 = -z_4 z_5 \,. \end{gathered}$$

Con le formole (8') si trovano i punti della riemanniana W' rispondenti alle rette della congruenza che secano l'S'_4 *fuori* della retta r che S'_4 ha in π, perchè per un tale punto sono nulli z_1, z_3, z_5 e quindi le z'_j risultano tutte nulle, e il relativo punto della varietà risulta indeterminato. Ora mentre nel caso della rappresentazione della varietà W' in S_5, mediante

le (8), escludendo da W i punti rispondenti al piano fondamentale π, cioè imponendo la condizione z_1, z_3, z_5 non tutti nulli, si ottenevano *tutti* i punti rispondenti alle rette della congruenza, cioè tutti i punti della riemanniana W' del piano biduale, in questo caso, invece, della rappresentazione della W' nell'S'_4 mediante le (8'), non si possono escludere tutti i punti di W rispondenti alla retta fondamentale r, per ottenere la riemanniana W', perchè si verrebbero a perdere i punti di W' rispondenti alle rette della congruenza appoggiate alla retta r. Più sotto preciseremo quali sono i punti dell'intorno della retta fondamentale r che rispondono ai punti di W che bisogna escludere per avere la riemanniana W'.

Una iperquadrica V del sistema (V) è secata da S'_4 in una quadrica Q passante per la retta r, dato che V passa per π, ed avente in ciascun punto Z_1 di r l'iperpiano tangente passante per il piano in cui l'S'_4 seca l'S_3 di S_5 tangente comune alle iperquadriche di (V) in Z_1, cioè l'S_3 omologo di Z_1 nella proiettività σ. Al variare di Z_1 in r tale piano tangente descriverà il fascio di asse r posto nell'S'_3 in cui l'S'_4 seca l'S_4 riempito dagli S_3 omologhi in σ dei punti di r. Dunque:

Il sistema lineare ∞^5 di iperquadriche (Q) di S'_4 rispondenti alle sezioni iperpiane della varietà W, *è costituito dalle iperquadriche passanti per la retta* r *ed aventi in ciascun punto* Z_1 *di questa retta l'iperpiano tangente passante per il piano del fascio* (r), *di asse* r, *posto in* S'_3, *omologo di* Z_1 *in una proiettività* σ' *fra* r *ed* (r).

7. Stelle generatrici della congruenza (S_1) e piani generatori della W.

Le rette z della congruenza (S_1) uscenti da un punto Z_1 di π, sono tutte e sole le rette della stella di vertice Z_1 dell'S_3 omologo di Z_1 in σ, escludendo quelle del fascio di sostegno π. Una tale stella di rette corrisponde ad un piano della varietà W, infatti le rette di essa appartenenti a due iperquadriche di (V) sono le rette uscenti da Z_1 appoggiate ai due S_3 determinanti le due iperquadriche, cioè alle due rette che tali S_3 segnano nell'S_3 ambiente della stella, e di tali rette ne esiste una sola. Ciò significa che l'S'_6 di S'_8, intersezione dei due iperpiani rispondenti alle due iperquadriche, seca il luogo dei punti di W rispondenti alle rette della stella, in un punto. Tale luogo è dunque un piano che si dirà *piano generatore* della W. Alle rette di un fascio della stella, corrispondono nel piano generatore i punti di una retta. In particolare alle rette della stella rispondenti al fascio di sostegno π corrispondono i punti di una retta del piano generatore di W. Escludendo questa retta si ottiene un piano euclideo complesso appartenente alla riemanniana W′ del piano biduale. Un tale piano si dirà *piano generatore della* W′.

Se sono le (3) le equazioni dell'S_3 ambiente della stella, e quindi di

vertice $Z_1(O, \alpha, O, \beta, O, \gamma)$, ogni punto Z di S_3 ha le coordinate del tipo

$$Z(p\alpha, z_2, p\beta, z_4, p\gamma, z_6). \tag{9}$$

Dentro tale S_3 possiamo assumere come coordinate di Z la quaterna (p, z_2, z_4, z_6) di numeri non tutti nulli definita a meno di un fattore non nullo. L'equazione $p = 0$ rappresenta il piano π dentro S_3, dato che per $p = 0$ si annullano la prima, terza e quinta coordinata di Z. Per le (8) al punto Z di coordinate (9) risponde nella varietà W il punto Z' di coordinate (dividendole tutte per p)

$$\begin{gathered} z'_1 = p\alpha^2, \quad z'_2 = p\beta^2, \quad z'_3 = p\gamma^2, \quad z'_4 = p\alpha\beta, \quad z'_5 = p\alpha\gamma, \quad z'_6 = p\beta\gamma, \\ z'_7 = \alpha z_4 - \beta z_2, \quad z'_8 = \alpha z_6 - \gamma z_2, \quad z'_9 = \beta z_6 - \gamma z_4. \end{gathered} \tag{10}$$

Le (10) sono, pertanto, le equazioni parametriche del piano generatore di W rispondente alla stella generatrice considerata, con i parametri omogenei (p, z_2, z_4, z_6). Per $p = 0$ le (10) ci dànno

$$z'_1 = z'_2 = z'_3 = z'_4 = z'_5 = z'_6 = 0 \tag{11}$$

e quindi la retta del piano generatore di W, rispondente alle rette della stella giacenti nel piano π appartiene al piano ∂ di S'_8 di equazioni (11), e dentro questo piano avrà per equazioni le tre ultime equazioni (10). Al variare del piano generatore tale retta di appoggio al piano ∂ descrive, pertanto, questo piano.

Nella rappresentazione di W nell'S'_4 i piani generatori rispondono ai piani passanti per la retta fondamentale r (intersezioni degli S_3 di (π) con S'_4), perchè le iperquadriche del sistema *(Q)* secano in un tale piano la rete di coniche spezzate nella retta fissa r ed in una retta variabile nella rete di rette del piano. Sicchè sarà alla retta r, come retta di detto piano, che corrisponde nel piano generatore la retta posta in ∂. Però tale piano non deve appartenere al fascio dei piani tangenti comuni alle iperquadriche di *(Q)*, fascio di ambiente S'_3.

In un tale piano le quadriche di *(Q)* secano il fascio di coniche spezzate in r ed in una retta variabile nel fascio di centro Z_1, essendo Z_1 il punto di contatto comune. Le quadriche passanti per un punto Z di tale piano passano tutte per la retta ZZ_1 e quindi al punto Z variabile in ZZ_1, e non base per *(Q)*, corrisponde un unico punto Z' di W. Variando la retta nel fascio, Z' descriverà una retta di W. In questo caso il piano generatore, che deve corrispondere al piano considerato, proviene dall'intorno di Z_1 posto nel piano, che è costituito da punti base di *(Q)*. Intanto abbiamo che:

La varietà quadridimensionale W *è costituita da* ∞^2 *piani generatori secanti in una retta un piano fisso* ∂. *La varietà* W', *riemanniana del piano biduale, si ottiene da* W *sopprimendo il piano* ∂. Segue che:

Due piani generatori di W *si secano in un punto di* ∂. *Due piani generatori di* W' *non hanno alcun punto in comune.*

Si osservi esplicitamente che nella rappresentazione della W in S'_4 i punti del piano ∂ rispondono ai punti dell'intorno dei vari punti Z_1 di ν non basi per *(Q)*, cioè non posti nel piano tangente comune alle iperquadriche di *(Q)* nel punto Z_1.

Più sotto dimostreremo che la varietà W è di ordine 6 e che il piano ∂ è doppio per essa.

8. Le V_3^3 di W riempite da ∞^1 piani generatori.

Consideriamo in S_5 un S_4 passante per π. Al fascio di S_3 di vertice π, posto in S_4, corrisponderà sulla W un sistema di ∞^1 piani generatori, secanti il piano ∂ in un fascio di rette. Infatti il punto Z_1 omologo di S_3 nella proiettività σ descriverà in π una retta e quindi nelle equazioni (10) del piano generatore corrispondente i parametri α, β, γ saranno funzioni lineari omogenee di due parametri omogenei. Ciò porta che la retta del piano ∂ con cui il piano generatore si appoggia a ∂, avente per equazioni le (11) e le tre ultime delle (10), descrive un fascio. Se diciamo D il centro di questo fascio il punto D corrisponde all' S_4 passante per π considerato. Se S_4 descrive un fascio avente per vertice un S_3 passante per π, il punto D descriverà su ∂ la retta in cui il piano generatore corrispondente seca ∂. Sicchè l'S_4 e il punto D si corrispondono in una proiettività fra la stella (S_4) di vertice π ed il piano ∂].

Diciamo V_3 la varietà di W riempita dai piani generatori rispondenti agli S_3 del fascio considerato dentro S_4, e quindi alle stelle generatrici della congruenza posti in tali S_3. Se s è una retta di S_4 non appoggiata a π, alle rette z della congruenza appoggiate ad s (rette formanti una schiera rigata di una quadrica perchè mentre un punto Z descrive s il punto Z_1 della retta z passante per Z posto in π, descrive una retta proiettivamente ad s) corrispondono i punti di una conica c_s^2 di W. Infatti una iperquadrica del sistema *(V)* seca s in due punti, e dette quadriche rispondono alle sezioni iperpiane di W.

La conica c_s^2 è una direttrice della V_3 perchè ogni piano generatore γ di V_3, rispondente ad un S_3 di S_4, seca s in un punto, diciamo G. Se chiamiamo omologo di G la retta g di appoggio di γ al piano ∂ (retta del fascio di centro D) nasce una corrispondenza proiettiva fra il fascio ci centro D del piano ∂ e la conica c_s^2.

La nostra V_3 viene ad essere riempita dai piani congiungenti le coppie di retta e punto omologhi in tale proiettività. La V_3 appartiene, pertanto, all' S_5 congiungente ∂ con il piano della c_s^2. Un S_4 di detto S_5 passante per ∂, seca la V_3, oltre che in ∂, nei due piani che si ottengono congiungendo i due punti intersezioni di c_s^2 con l'S_4 considerato con le loro rette omo-

loghe nel fascio di centro D. Osservando che il piano ∂ è semplice per la V_3, perchè per un punto generico di ∂ passa un solo piano generatore di V_3, si deduce che la V_3 è del 3.° ordine.

Il punto D è triplo per la V_3^3, infatti un piano dell'S_5 ambiete della V_3, passante per D, determina col piano ∂ un S_4 che seca la varietà, per quanto sopra è detto, in tre piani intersecantisi in D, sicchè il piano considerato non seca la varietà in alcun punto fuori di D. La V_3^3 è pertanto un cono di vertice D. Secandolo con un S_4 del suo S_5 ambiente si ottiene una superficie cubica rigata con una direttrice semplice nella retta d intersezione di S_4 con ∂. Sicchè la V_3^3 è il cono cubico che si ottiene proiettando da D una rigata cubica normale di un S_4.

In corrispondenza agli S_4 di S_5 passanti per π avremo nella W un sistema ∞^2 V_3^3 coniche col vertice variabile nel piano ∂, poste in S_5 passanti per ∂. Due di tali S_4 si secano in un S_3 ambiente di una stella generatrice, e quindi due delle dette V_3^3 oltre del piano ∂ avranno in comune un piano generatore di W ne segue che i loro S_5 ambienti hanno in comune l'S_3 congiungente ∂ con tale piano generatore, essi sono pertanto congiunti da un iperpiano S_7 dell'S_8 ambiente della W. Concludendo si ha:

Alle rette della congruenza (S_1) *poste in un* S_4 *di* S_5 *passante per il piano* π *corrispondono nella* W *i punti di una* V_3^3 *conica, col vertice* D *nel piano* ∂, *costituita da* ∞^1 *piani generatori intersecanti* ∂ *nel fascio di rette di centro* D. *Due tali* V_3^3 *si secano nel piano* ∂ *e in un piano generatore. I loro* S_5 *ambienti sono congiunti da un iperpiano dell'* S_8 *ambiente della* W_4.

9. Ordine e costruzione della W_4.

L'iperpiano S'_7 di S'_8 congiungente i due S_5 ambienti di due V_3^3 della W_4, corrispondenti di due S_4 passanti per π, seca la W_4 in una W_3 di cui faranno parte le due V_3^3. Dimostriamo che tale sezione iperpiana W_3 è costituita precisamente dalle due V_3^3. Infatti la iperquadrica di *(V)* rispondente ad S'_7 deve contenere i due S_4 che corrispondono alle due V_3^3, e quindi detta iperquadrica si spezza i tali due S_4, e, conseguentemente, la sezione iperpiana è costituita dalle due V_3^3. La W è pertanto del 6.° ordine.

La costruzione dello V_3^3 rispondente ad un S_4 passante per π, si può estendere alla W_4^6. A tal fine fissiamo nell'S_5 un piano σ indipendente da π. Ogni S_4 per π seca σ in una retta s non appoggiata a π a cui corrisponde una conica c_s^2 nella W_4^6. Al variare di s in σ detta conica descrive una superficie di Veronese, risultando questa superficie rappresentata in σ dal sistema lineare di tutte le coniche perchè è in tale sistema che σ è secato dal sistema lineare di iperquadriche *(V)*. Ogni piano generatore della W seca tale superficie di Veronese V_2^4 in un punto, perchè ogni S_3 di S_5 passante per π seca σ in un punto. Chiamiamo omologo di questo punto di V_2^4 la retta del piano ∂ secondo cui detto piano generatoru si appoggia a ∂.

Mentre una retta di ϑ descrive un fascio di centro D il punto omologo nella V_2^4 descrive una conica c_3^2, si ha, cioè, una *reciprocità* fra il piano ϑ e la superficie di VERONESE, considerata come un S_2 in cui gli S_1 sono le coniche. Si ha pertanto:

In un S_8 *si assegnano un piano* ϑ *e un* S_5 *indipendenti, ed una superficie di* VERONESE V_2^4 *in questo* S_5. *Fissata una reciprocità fra il piano e la superficie di* VERONESE, *la varietà* W_4 *riempita dagli* ∞^2 *piani congiungenti ogni retta di* ϑ *con il punto reciproco nella* V_2^4, *è di ordine 6, e costituisce, sopprimendovi i punti del piano* ϑ, *la riemanniana* W' *del piano biduale. I piani generatori di* W *appoggiati a* ϑ *nelle rette di un fascio di centro* D *costituiscono una* V_3^3 *conica col vertice in* D, *secante la superficie di* VERONESE *nella conica reciproca del punto* D.

10. Multiplicità del piano ϑ per la W_4^6.

Un S_6 di S'_8 passante per ϑ seca la superficie di VERONESE V_2^4 in quattro punti che congiunti con le loro rette reciproche nel piano ϑ ci danno quattro piani generatori della W_4^6, sicchè detto S_6 seca la W_4^6 fuori del piano ϑ in una superficie del 4.° ordine (spezzata i quattro piani generatori) e quindi *il piano* ϑ *è* doppio *per la* W_4^6.

11. Nota.

L'ordine della varietà W_4, che è rappresentata in S'_4 dal sistema lineare di iperquadriche *(Q)* (n. 6), si può trovare calcolando il grado di *(Q)*. Ricordiamo che *(Q)* è costituito dalle iperquadriche di S'_4 passante per la retta r ed aventi in ciascun punto Z_1 di questa retta l'iperpiano tangente per il piano del fascio di asse r posto in un S'_3 per r, ed omologo di Z_1 in una proiettività σ' fra r ed il fascio stesso. Tre di tali iperquadriche si secano nella netta r contata due volte ed in una curva residua c^6 che si appoggia ad r in 3 punti, dato che un S_3 condotto per r seca c^6 fuori di r in 3 punti che sono le intersezioni, fuori di r, delle tre quadriche di S_3 sezioni con le tre iperquadriche, avendo dette quadriche la retta r in comune ed ammettenti in ciascun punto Z_1 di r una tangente comune.

Le tre tangenti a c^6 nei tre punti di appoggio ad r apparterranno rispettivamente ai tre piani tangenti comuni alle iperquadriche in tali punti, e quindi ciascuno di detti tre punti conterà per due fra le 12 intersezioni di c^6 con una quarta iperqundrica del sistema *(Q)*, sicche quattro iperquadriche di *(Q)* si secano fuori di r in 6 punti cioè il grado di *(Q)* è 6.

I punti P' del piano doppio ϑ della W_4^6 rispondono ai punti P di S'_4 infinitamente vicini alla retta fondamentale r senza essere punti base per *(Q)*. Che la multiplicità di un tale punto P' per la W_4^6 sia due si può dimostrare facendo vedere che è 2 la differenza del grado di *(Q)* col grado

delle iperquadriche di (Q) passanti psr P, cioè che queste iperquadriche formano un sistema lineare $(Q)_P$ di grado 4. Sia infatti P un punto di S'_4 infinitamente vicino ad un punto M di r, fuori del piano μ tangente comune alle Q nel punto M, e quindi non base per (Q). L'S_3 congiungente il piano μ con P sarà tangente comune a tutte le Q di (Q) passanti per P, cioè il sistema $(Q)_P$ è costituito dalle Q che hanno in M per S_3 tangente detto $S_3 = \mu P$. Tre quadriche di $(Q)_P$ si secano nella retta r contata due volte e in una c^6 residua che si appoggia ad r in 4 punti, infatti un S_3 generico condotto per r se le tre Q in tre quadriche passanti per r ed aventi in due punti M ed N di r lo stesso piano tangente (tali punti sono le intersezioni dell'S_3 con l'$S_3 = \mu P$ e con l'S'_3) e quindi intersecantisi fuori di r in due punti. Ciò porta che la c^6 s'appoggia ad r in 4 punti. Le tangenti alla c^6 nei quattro punti di appoggio ad r apparterranno ai rispettivi piani tangenti comuni delle Q, e qnindi una quarta Q di $(Q)_P$ seca la c^6 fuori di r in 4 punti. Ciò dimostra che P' è un punto punto doppio per la W_4^6.

È evidente che P' è immagine di tutti i punti W dell'intorno di M posti nell' $S_3 = \mu P$, sicchè avremo un solo punto P' per ogni intorno di M posto in un S_3 del fascio di centro μ. Una iperquadrica di (Q) ha un solo S_3 tangente in tale fascio che è il suo S_3 tangente in M, e quindi un iperpiano di S'_8 seca il luogo dei punti P', rispondenti all'intorno di M fuori di μ, in un sol punto, cioè tale luogo è una retta. Al variare di M su r tale retta descrive una rigata che deve coincidere col piano ∂ sopra trovato, luogo dei punti doppi di W, per dimostrare che tale rigata è un piano intersechiamola con un S_6 comune a due S_7 rispondenti a due delle nostre Q, diciamo Q' e Q''. Si tratta di far vedere che esiste un sol punto M di r tale che in M le due Q' e Q'' hanno lo stesso S_3 tangente. Fissiamo in S'_4 una generica retta s e chiamiamo omologhi due punti X' e X'' di s quando sono intersezioni di due spazi S'_3 e S''_3 rispettivamente tangenti a Q' e Q'' in uno stesso punto M di r. Due tali spazi hanno in comune un piano μ posto in S'_3, se X' coincide con X'' ed è fuori del piano μ, sarà S'_3 coincidente con S''_3. Ora la corrispondenza fissata su s è una proiettività che ha un punto unito nel punto T in cui s seca l' S'_3, e quindi esiste un solo punto unito che risponde alla questione, e quindi quella rigata è un piano. Così resta dimostrata in altro modo l'esistenza del piano doppio ∂ nella W_4^6.

12. Le congruenze paraboliche di (S_4) immagini delle rette del piano biduale

Consideriamo nel piano biduale una retta biduale, cioè l'insieme dei punti $X(\lambda, \mu, \nu)$ del piano biduale soddisfacenti ad un'equazione

$$\bar{\alpha}\lambda + \bar{\beta}\mu + \bar{\gamma}\nu = 0 \qquad (12)$$

con la terna di numeri diduali $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ di caratteristica 2. Posto

$$\bar{\alpha} = a_1 u + a_2 \varepsilon \quad , \quad \bar{\beta} = a_3 u + a_4 \varepsilon \quad , \quad \bar{\gamma} = a_5 u + a_6 \varepsilon$$

i tre numeri complessi a_1, a_3, a_5 non sono tutti nulli. Tenendo conto delle posizioni del n. 3 per λ, μ, ν, la equazione biduale (12) equivale alle due equazioni nel corpo complesso

$$(12') \qquad a_1 z_1 + a_3 z_3 + a_5 z_5 = 0$$

$$(12'') \qquad a_2 z_1 + a_1 z_2 + a_4 z_3 + a_3 z_4 + a_6 z_5 + a_5 z_6 = 0.$$

L'iperpiano S'_4 di S_5 di equazione (12') passa per il piano π dei punti singolari della congruenza (S_1), essendo π di equazioni $z_1 = z_3 = z_5 = 0$. L'iperpiano S''_4 di equazione (12'') seca π nella retta r' di equazione

$$(13) \qquad a_1 z_2 + a_3 z_4 + a_5 z_6 = 0$$

e quindi l'$\overline{S}_3$ intersezione di S'_4 ed S''_4 interseca il piano π nella retta r'

Si osservi ora che se $Z_1(O, \alpha, O, \beta, O, \gamma)$ è un punto di r'. e quindi con i numeri complessi α, β, γ soddisfacenti alla (13), l'S'_3 di (π) omologo di Z_1 nella proiettività σ, cioè l'S_3 di equazione (3) del n. 2, risulta appartenente all'S'_4 di equazione (12'), infatti un tale punto ha le tre coordinate z_1, z_3, z_5 proporzionale ad α, β, γ e quindi soddisfa alla (12'), perchè questi tre numeri soddisfano alla (13) che ha gli stessi coefficienti della (12). Ne segue che variando Z_1 in r' il suo S_3 omologo in σ varia dentro S'_4 descrivendovi il fascio di vertice π, e quindi secando l'$\overline{S}_3$, passando per la retta r', in un piano che descrive il fascio di asse r', proiettivamente alla retta stessa, in una proiettività che indicheremo con $\overline{\sigma}$. Le rette della congruenza (S_1) uscenti dal punto singolare Z_1 sono le rette della stella ambiente S_3 omologo di Z_1 in σ, sicchè le rette di (S_1) uscenti da Z_1 ed appartenenti a $\overline{S}_3$ sono le rette del fascio di centro Z_1 posto nel piano omologo di Z_1 in $\overline{\sigma}$. Ne segue che:

Le rette della congruenza (S_1), rispondenti ai punti della retta biduale considerata, costituiscono dentro $\overline{S}_3$ la congruenza parabolica di asse r, determinata dalla proiettività $\overline{\sigma}$.

Gli spazi ambienti delle congruenze paraboliche immagini delle rette del piano biduale sono gli $\overline{S}_3$ che secano in una retta il piano singolare π e che appartengono all'iperpiano riempito dal fascio di S_3 omologhi in σ dei punti della retta di appoggio.

Si osservi che nell'iperpiano S''_4 lo spazio $\overline{S}_3$, intersezione con l'iperpiano S'_4, omologo della retta r che S''_4 seca in π, nella proiettività σ, è l'unico S_3 ambiente di una congruenza iperbolica immagine di una retta del piano biduale, sicchè se indichiamo con (S_3) l'insieme di tali S_3, congruenza inviluppo (figura duale della congruenza di rette (S_1)) immagine

del piano biduale *rigato*, risulta che tale congruenza inviluppo è di classe 1, perchè l'iperpiano S''_4, di equazione (12''), che un generico iperpiano, per la genericità dei coefficienti a_j, contiene un solo di tali S_3. Questo risultato è d'accordo con un teorema generale dimostrato nella memoria citata (n. 10, teorema III).

13. I coni quadrici della W_4^6 immagini delle rette biduali.

Alla congruenza parabolica di rette di (S_4), contenuta in $\overline{S}_3$, corrisponde nella W una superficie che è un cono quadrico col vertice D rispondente alla retta r' asse della congruenza, posto nel piano ∂. Nella rappresenzione di W nello spazio S'_4 (n. 6) tale cono è rappresentato nel piano intersezione di $\overline{S}_3$ con S'_4, dalle coniche passanti per il punto R' intersezione del piano con r', e tangenti in R' alla retta t in cui detto piano è secato dal piano di $\overline{S}_3$ omologo di R' in $\overline{\sigma}$, retta che appartiene all'iperpiano tangente in R' a ciascuna iperquadrica di *(Q)*, perchè appartiene pure al piano in cui l'S_3 omologo di R' in σ è secato da S'_4, piano tangente comune alle iperquadriche di *(Q)* in R'. Si osservi che R' appartiene pure alla retta r, intersezione di S'_4 con il piano π, fondamentale per *(Q)*.

14. Le V_3^3 della W_4^6 come immagini delle birette del piano biduale.

Se nella equazione (12) del n. 12, supponiamo che la terna di numeri biduali $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ si suppone di caratteristica 1, si ha l'equazione di una *biretta* del piano biduale. Cioè equivale a supporre i tre numeri a_1, a_3, a_5 tutti e tre nulli. In tal caso la (12) equivale ad una sola equazione nel campo complesso risultando la (12') identicamente soddisfatta. La (12'') rappresenterà, in questo caso, un iperpiano passante per α, e quindi la biretta sarà rappresentata dalla V_3^3 rispondente alle rette della congruenza poste in tale iperpiano.

Si ricordi che le V_3^3 sopradette sono coni col vertice posto nel piano ∂. S'intende che per avere la riemanniana della biretta dalla V_3^3 va escluso il piano ∂, che appartiene a detto ipercono cubico, come per avere la riemannia della retta biduale va escluso dal cono quadrico il vertice D, perchè questo appartiene al piano $\partial = 0$ perchè rappresenta l'asse della congruenza parabolica che non fa parte della congruenza (S_4).

Sulla deduzione del 2° principio della Termodinamica da un principio variazionale.

Nota del socio ordinario **A. Carrelli**

(Adunanza del dì 1. maggio 1943 - XXI)

Sunto. — Un ragionamento di Helmoltz permette di ricavare il 2° principio della Termodinamica da un principio variazionale. Si dimostra in questa Nota che la deduzione di Helmoltz è connessa con la considerazione di speciali sistemi meccanici detti *sistemi ciclici*, e l'introduzione di tali sistemi è perfettamente equivalente all'ammettere l'ipotesi del disordine elementare, ipotesi essenzialmente connessa col significato del 2° principio.

In uno studio sulle varie formulazioni del principio variazionale nei diversi campi della Fisica, e sulla importanza che esso attualmente acquista nella ricerca delle equazioni fondamentali per le varie particelle, [1]) è stato notato dallo scrivente che seguendo un ragionamento di Helmoltz [2]) anche il 2° principio della Termodinamica può ricondursi ad un principio variazionale.

Ma è ben noto, ed il Planck [3]) lo ha chiaramente messo in evidenza, che i fatti meccanici sono processi reversibili, e come tali per loro, e solo per loro, esiste la possibilità di una deduzione da un principio variazionale. Le classiche considerazioni di Boltzmann hanno avuto, com'è noto, il grandissimo merito di emancipare il concetto d'entropia da una qualsiasi idea connessa con una speciale tecnica, e lo ha collegato ai concetti probabilistici; un ragionamento di Helmoltz invece collega il 2° principio ad un principio variazionale.

Sembra dunque che tra questi due modi d'enunciare il 2° principio risulti una grave contraddizione, è opportuno dunque vedere come il ragionamento di Helmoltz, che tra breve riprodurremo, non sia fondamentalmente in contraddizione con quanto afferma Boltzmann, e che è fondato su basi assolutamente sicure.

Le difficoltà cui si è fatto cenno sopra possono riassumersi nella considerazione seguente: esiste un grande, insormontabile dualismo fra le leggi

---

[1]) Il lavoro è presso un editore di Firenze e non si può prevedere date le circostanze la data di pubblicazione.

[2]) H. von Helmoltz. J. f. Math. 97 - pag. 111.

[3]) M. Planck. La conoscenza del mondo fisico. Edizione Einaudi.

dinamiche, deducibili da un principio variazionale, e le leggi statistiche e questo dualismo in ultima analisi deriva dal dualismo esistente fra la semplicità alla quale può ricondursi un processo macrofisico e la complessità connessa con un processo considerato nei suoi elementi microfisici: le leggi dinamiche possono riferirsi ad un processo singolo mentre le leggi statistiche regolano l'insieme, e così la caduta di un grave è una legge dinamica che non ammette alcuna eccezione, il passaggio di calore da un corpo più caldo ad uno più freddo è un processo di tipo diverso, esso e estremamente probabile, ma rimane sempre un processo soltanto probabile. Da questa osservazione deriva questo punto fondamentale: se ci riferiamo ad un processo singolo il 2° principio, in linea di massima, non è in grado di dire nulla su di esso; può fare una previsione solo se si può, per altra via, essere sicuri che il processo che si considera non devia dal processo medio di un assieme di individui che abbiano tutti in comune lo stato iniziale, e cioè che il processo in esame sia da *considerare come esempio*. Si può dunque in base al 2° principio fare una previsione solo se ci si può riferire invece che a questo unico sistema ad un gran numero di essi, e se si è sicuri che questi singoli elementi sui quali si adopera l'osservazione statistica, si comportino *in modo assolutamente indipendente gli uni dagli altri*; deve essere valida in altre parole l'*ipotesi del disordine elementare*, anzi secondo il PLANCK il 2° principio è da enunciare anche dicendo che è il principio del disordine elementare.

È appunto questa interpretazione del 2° principio che elimina la contraddizione a cui si e fatto cenno precedentemente, permettendo così di giustificare la deduzione fatta da HELMOLTZ [1]) dell'enunciato di CARNOT in base ad un principio variazionale.

Il contenuto essenziale secondo HELMOLTZ di questo principio può sintetizzarsi in queste linee fondamentali: è noto che la quantità di calore dQ che si assorbe, (o si produce) in una trasformazione infinitesima non è un differenziale esatto, mentre il dU, che esprime la variazione dell'energia interna, in base al 1° principio è un differenziale esatto; però l'espressione

$$dQ = dU - dA, \tag{1}$$

secondo appunto questo si ricava dal 2° principio, ammette un fattore integrante h. Ora l'analisi matematica dimostra che se un'espressione ammette un fattore integrante esistono altri infiniti fattori integranti, quindi v'è ancora una certa arbitrarietà nella genesi di un differenziale esatto dalla (1): secondo HELMOLTZ l'importante e non solo che della (1) possa ottenersi un differenziale esatto, che poi è la funzione entropia, ma inoltre che l'in-

---

[1]) H. VON HELMOLTZ. loc. cit.

verso di questo fattore k sia proprio la temperatura assoluta T alla quale si assorbe (o si genera) la quantità di calore dQ, in quanto che questo risultato $k = 1 : T$ traduce in una veste matematica quanto e direttamente controllabile dalla esperienza: che cioè il calore passa spontaneamente da un corpo caldo ad un corpo freddo.

Premesse queste considerazioni (che mettono in luce un fatto notissimo e che sarà ancora ricordato in seguito) passiamo ad esporre la deduzione di Helmoltz; in questa deduzione si parte da sistemi complessi, ed in tali sistemi relativamente alla trattazione delle trasformazioni di lavoro in calore e viceversa si distinguono due specie di coordinate, le *controllabili* che sono macroscopiche, e cioè quelle che producono con le loro variazioni effetti visibili sul sistema, e quelle *incontrollabili* che si riferiscono agli elementi del sistema, e che come tali sono soggette a continue variazioni ma che sfuggono al nostro diretto controllo. Si ammetterà che non tutte le variazioni di queste coordinate siano senza effetto, ma le variazioni di queste che risultano ai nostri apparecchi di misura. sono proprio quelle per le quali tutto il sistema acquista o cede quella speciale forma d'energia detta calore; invece la variazione dell'energia del sistema per effetto delle variazioni delle coordinate controllabili è il lavoro fatto dal sistema che s'indicherà come di consueto con dA.

Come vedesi nell'impostazione della trattazione secondo questo schema il concetto fondamentale è quello di riferirsi ad un insieme di elementi. A quest'assieme poi si attribuisce secondo appunto il pensiero di Helmoltz una proprietà, quella cioè di essere dotato di uno speciale carattere, che ora si definirà e che conferisce al sistema che la possiede la qualifica di *sistema monociclico* (o poli-). Il sistema è ciclico quando una o più coordinate e cioè uno (o più parametri) che ne fissa la posizione è dotato di movimento periodico con la condizione però che la coordinata ciclica generica q_c non compaia nell'espressione dell'energia cinetica T e potenziale U; T però dev'essere funzione di $\dot{q}_c$. Il punto essenziale, che bisogna bene porre in evidenza, è che l'introduzione di questo tipo di coordinate q_c non rimane una semplice posizione di tipo astratto, perchè ricerche compiute da Boltzmann [1]), da Byron [2]) e da altri hanno portato alla conclusione che possono immaginarsi modelli meccanici che sono appunto sistemi ciclici secondo la definizione data. La importanza che questi sistemi assumono per il problema che c'interessa è illustrato da questo teorema fondamentale: partendo da una particella che non compie moto monociclico, si può costruire un sistema monociclico ordinando un gran numero di tali particelle, così per es. una particella che si muove descrivendo un'ellisse

[1]) L. Boltzmann. J. f. Math. 98 - pag. 85.

[2]) G. H. Byron. Rep. Brit. Ass. 1891 - pag. 108.

sotto l'azione di una forza newtoniana, non compie un moto monociclico, se si considera però uno sciame di queste particelle, la cui densità in ogni punto è indipendente dal tempo, si genera un sistema monociclico. Questo teorema generale trova poi un'estensione che rappresenta il punto essenziale delle nostre considerazioni, teorema dovuto al BOLTZMANN [1], in base al quale può affermarsi che un sistema costituito da un gas le cui particelle obbediscono alla legge di distribuzione di MAXWELL è un sistema monociclico.

Ma quando in un sistema di particelle si realizza la distribuzione di velocità corrispondente alla legge di MAXWELL si può ritenere che per questo gran numero di particelle è da considerarsi valida l'ipotesi del disordine elementare; si conclude dunque che l'introduzione del concetto di sistema ciclico, che può immaginarsi realizzato in base a quanto sopra abbiamo detto con un assieme formato da un gran numero d'individui che si muovono con speciali modalità, porta nel ragionamento il principio del disordine elementare; le leggi dinamiche derivabili da un principio variazionale sono applicabili ad elementi che caratterizzano questo assieme, ma la presenza nel problema dell'assieme d'individui dà inevitabilmente al ragionamento quel carattere che deve necessariamente avere, e cioè un carattere probabilistico.

Premesse dunque queste considerazioni, che sanano quella contraddizione concettuale che si è rivelata, é facile seguendo HELMOLTZ dedurre da un principio variazionale il 2º principio. Si consideri un sistema monociclico per il quale si ha $U = U(q_i, \dots)$ $T = T(q_i \dots, \dot{q}_i, \dot{q}_c \;\; .)$ e cioè nel quale la coordinata ciclica q_c non compare in U, mentre compare la (o le) generica q_i e siano K_i le forze generalizzate. In base alle definizioni prime riportate si ha

$$dA = \sum_i K_i \, dq_i \qquad (1)$$

$$dQ = K_c \, dq_c . \qquad (2)$$

Si consideri ora la lagrangiana corrispondente

$$L = T - U + \sum_i K_i \, \Delta q_i = L(q \; \dots, \dot{q}_i \dots \dot{q}_c, t).$$

Ponendo il principio variazionale seguente

$$\delta \int (T - U + \sum_i K_i \Delta q_i) dt = \delta \int L(q_1, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_c, t) \, dt$$

[1]) L. BOLTZMANN. J. f. Math. 98 - pag. 68.

si ricava in generale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = K_i$$

ed in particolare per la coordinata monociclica q_c:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = K_c .$$

Introducendo in modo analogo a quanto si fa normalmente l'impulso coniugato alla coordinata ciclica q_c, e cioè ponendo

$$p_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} ,$$

si ricava dalle lagrangiane prime scritte che:

$$\frac{dp_c}{dt} = K_c ;$$

sostituendo nella (2) si ha:

$$dQ = K_c dq_c = K_c \frac{dq_c}{dt} dt = \frac{dp_c}{dt}\frac{dq_c}{dt} dt = \dot{q}_c dp .$$

D'altra parte l'energia cinetica T_c che compete alla coordinata ciclica è data analogamente da:

$$T_c = \frac{1}{2} p_c \dot{q}_c .$$

In base a questa espressione di T_c è possibile affermare, il che corrisponde al 2° principio, che il dQ ammette un fattore integrante: infatti

$$\frac{dQ}{T_c} = 2\frac{dp_c}{p_c} = 2\, lg\, p_c ; \qquad (3)$$

ma si vede anche molto facilmente in accordo al teorema d'analisi che ab-

biamo prima ricordato che non esiste questo solo fattore integrante $\frac{1}{T}$, si si può avere infatti anche

$$\frac{dQ}{q_c} = dp.$$

È invece molto importante porre in evidenza che la (3) rappresenta proprio il 2° principio in quanto che il fattore integrante $1 : T_c$ è inversamente proporzionale all'energia cinetica della coordinata monociclica, e cioè ad una quantità proporzionale in base ai concetti cinetici proprio alla temperatura assoluta dell'insieme, com'è appunto richiesto dalla teoria cinetica.

Si conclude quindi affermando che nel ragionamento di HELMOLTZ per la deduzione del 2° principio da un principio variazionale l'introduzione del concetto di sistema ciclico sta a rappresentare l'introduzione dell'ipotesi fondamentale del disordine elementare.

La statica dei prismi non seguenti la legge di Hooke

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 1.° maggio 1943)

Sunto. — Si studia la statica dei prismi costituiti da materiali che non seguano la legge di Hooke. Si pongono in luce le differenze rispetto alla teoria statica abituale. Si studiano le sollecitazioni di flessione e sforzo normale, taglio e torsione. Si determinano le deformazioni e si dà la teoria per la ricerca delle incognite iperstatiche, specificandola in alcuni esempi. Si discute l'applicabilità dei risultati ottenuti allo studio dei prismi sollecitati nel campo plastico.

1. — *Introduzione.* Intendiamo studiare, nella presente memoria, la statica dei prismi per i quali non sia verificata la legge di Hooke. Tale studio, da noi iniziato in alcune precedenti note [1], viene qui sviluppato ed ampliato, nonchè esteso alle diverse specie di sollecitazioni. Nella prima parte della presente supporremo che le tensioni che si producono nel prisma si mantengano nel campo elastico: verrà quindi meno la proporzionalità tra tensioni e deformazioni, non l'elasticità del materiale. Nella seconda parte faremo alcune osservazioni sull'applicabilità dei risultati trovati nella prima ai prismi sollecitati nel campo plastico.

Per intenderci e per evitare locuzioni lunghe, chiameremo nel prosieguo prismi di Hooke quelli costituiti di materiale per il quale è verificata la legge di Hooke, e prismi non di Hooke quelli costituiti di materiale per il quale detta legge non è verificata.

PARTE PRIMA

Prismi sollecitati nel campo elastico.

2. — *Relazione fondamentale tra σ e ε.* La posizione nuova, rispetto all'abituale teoria statica, è che la relazione:

$$\sigma = E\varepsilon$$

---

[1]) F. Jossa. *Calcolo statico di prismi costituiti di materiali che non seguano la legge di* Hooke. — Rend. della R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat. Napoli, 1941.

F. Jossa. *Calcolo di prismi a sezione rettangolare sollecitati a flessione semplice in regime non di* Hooke. — Ibidem, 1942.

con E costante, dev' essere sostituita dall' altra:

$$\sigma = E_\varepsilon \, \varepsilon \qquad [1]$$

essendo E_ε funzione di ε.

Per un determinato materiale, tracciata quindi la curva σ, ε, che risulterà assolutamente generica, potremo dare diversi significati ad E.

In un determinato punto P, di coordinate σ_P, ε_P, potremo considerare le seguenti grandezze:

$$E_0 = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_P} \qquad [2]$$

che chiamiamo modulo di elasticità longitudinale originario, rappresentato dalla tangente trigonometrica dell'angolo che la corda OP forma con l' asse x;

$$E_{ist} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \qquad [3]$$

che chiamiamo modulo di elesticità longitudinale istantaneo, rappresentato dalla tangente trigonometrica dell' angolo che la tangente geometrica alla curva σ, ε nel punto P fa con l'asse x.

Analogamente all' E_0, si può definire, per un determinato intervallo,

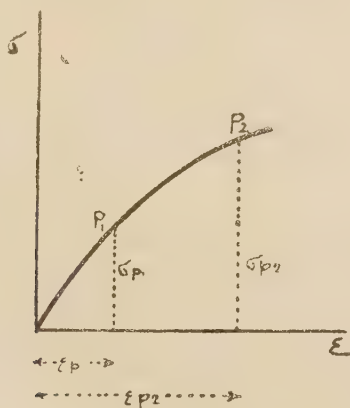



Fig. 1.

tra i punti P_1 e P_2, un modulo di elasticità longitudinale medio, espresso dalla:

$$E_m = \frac{\sigma_{P_2} - \sigma_{P_1}}{\varepsilon_{P_2} - \varepsilon_{P_1}} \qquad [4]$$

rappresentato per conseguenza dalla tangente trigonometrica dell' angolo che la corda P_1P_2 fa con l' asse x.

In quanto segue ci occorrerà di considerare quasi sempre l'E_0 originario.

3. — *Discussione sull'applicabilità ai prismi non di* Hooke *di risultati noti per i prismi di* Hooke. Si può in generale affermare che rimangono inalterate le proprietà e le relazioni di pura statica, nelle quali non entrano le tensioni interne, e che si modificano invece quelle nelle quali compaiono le tensioni, o le deformazioni espresse mediante le tensioni stesse.

Esaminiamo, per conseguenza, partitamente ciò che si verifica per alcune proprietà fondamentali.

Il principio di sovrapposizione degli effetti non è più ammissibile nella ricerca delle tensioni interne: non si possono, in altri termini, applicare successivamente ad un medesimo prisma due sistemi di forze esterne, trovare le tensioni provocate da ognuno di essi indipendentemente dall'altro, ed affermare che la somma di tali tensioni, in un punto, eguaglia la tensione provocata nello stesso punto dai due sistemi agenti simultaneamente.

Esso è invece sempre applicabile ai sistemi di forze esterne, o che possono considerarsi tali, agenti sul solido prismatico. Ad esempio, è ancora vera la relazione importantissima, che ci occorrerà nel prosieguo:

$$N = N_0 + N' X_1 + N'' X_2 + \ldots\ldots N^{(n)} X_n \qquad [5$$

perchè essa esprime una proprietà di pura statica, che cioè la sollecitazione totale N è la somma di sollecitazioni parziali, ognuna delle quali è proporzionale alla forza esterna (le X possono considerarsi forze esterne) che la produce. Non consideriamo cioè, ora, distribuzioni di tensioni unitarie, ma tensioni complessive N, che devono far equilibrio alle forze esterne.

I teoremi del lavoro vanno esaminati partitamente.

a) Il teorema di Clapeyron non è più verificato. Non si può infatti mantenere l'ipotesi, necessaria alla dimostrazione del detto teorema, che in uno stadio intermedio della deformazione forze e spostamenti siano proporzionali secondo lo stesso coefficiente ai loro valori finali. D'altra parte, se ricordiamo che l'area del diagramma σ, ε è proporzionale al lavoro di deformazione, costatiamo subito che, poichè per noi la curva σ, ε è assolutamente generica, non si può stabilire un'espressione così semplice del lavoro di deformazione qual'è quella fornita dal teorema di Clapeyron

Se ora volessimo ancora utilizzare un'espressione del tipo di quella di Clapeyron, potremmo:

α) o sostituire al posto del coefficiente 1/2 un altro generico k, e

scrivere, per esempio, per le sollecitazioni di flessione e pressione:

$$L = k\left[\int \frac{N^2\,dx}{EA} + \int \frac{M^2\,dx}{EI}\right] \qquad [6]$$

nella quale E è l'originario, è k indica il rapporto tra l'area $A = \int_0^P \sigma\,d\varepsilon$ e l'area $A_1 = \frac{1}{2}\,\sigma\,\varepsilon$ del triangolo OPP'.

β) o tirare da P una retta di compenso PP'' per il diagramma σ, ε in modo che l'area $PP'P''$ sia eguale ad A. In tal caso si può adottare

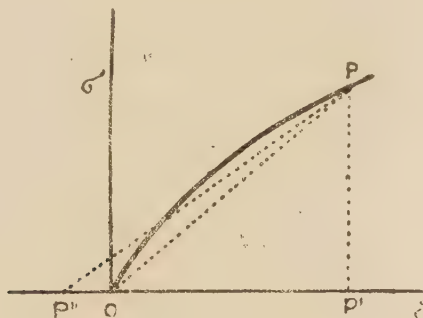



Fig. 2.

ancora l'espressione di CLAPEYRON, ma il modulo di elasticità E ha ancora un'altro valore ed un'altro significato, diversi da quelli sopra riportati. Esso è infatti dato dal rapporto:

$$E = \frac{PP'}{P'P''} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{(PP')}}$$

dove con $E_{(PP')}$ indichiamo il valore di ε ottenuto considerando come origine non il punto O, ma il punto P'': tale valore del rapporto è poi dato ovviamente dalla tangente trigonometrica dall'angolo che la retta di compenso PP'' forma con l'asse x.

Tali espressioni presentano però la particolarità che tanto k nella prima quanto E nella seconda sono funzioni di σ_P, onde il lavoro di deformazione risulta funzione delle forze esterne oltre che esplicitamente anche implicitamente, attraverso σ e quindi k o ε, perciò non presenta un'espressione valevole in genere per qualunque valore delle forze esterne, non essendo k o ε costanti.

b) Il teorema di BETTI non è più verificato. La dimostrazione di esso è difatti basata sul principio di sovrapposizione degli effetti in relazione

alle tensioni e alle deformazioni, che, come abbiamo visto, non è più verificato. Per la stessa ragione non è verificato il teorema di CASTIGLIANO, che si avvale di quello di BETTI.

c) Rimane invece valido, per la sua assoluta generalità, il teorema dei lavori virtuali. Nel suo enunciato infatti e nelle sue applicazioni non compare la considerazione del comportamento del materiale di cui è costituito il solido; nè esso si avvale di qualunque degli altri teoremi del lavoro sopra indicati. Tale risultato è per noi di particolare importanza, perchè ci permetterà di applicare ancora detto teorema alla determinazione delle incognite iperstatiche, anche nel campo non di HOOKE. Ma ritorneremo su ciò in seguito, e vedremo quale diverso significato bisogna dare ad alcuni dei simboli che compaiono nella ricordata equazione.

4. — *Sollecitazione di sforzo normale e flessione.* Tale sollecitazione, compresa abitualmente tra le composte, si tratta molto più opportunamente, ora, nel suo complesso, come apparirà dalla trattazione che segue.

Prendiamo in considerazione un prisma di forma qualsiasi, purchè simmetrica rispetto ad un asse y; indichiamo con x, normale ad y, l'asse neutro. Per la ricerca delle ε, considerazioni perfettamente analoghe a quelle abituali, che non è quindi il caso di ripetere, conducono alla:

$$\varepsilon = \frac{y}{r} \qquad [7]$$

E per l'equilibrio:

$$N = \int_A \sigma \, dA = \int_A E_\varepsilon \frac{y}{r} \, dA$$

$$M = \int_A \sigma y \, dA = \int_A E_\varepsilon \frac{y^2}{r} \, dA \qquad [8]$$

dove E_ε ha ovviamente il valore originario relativo al punto, della curva σ, ε di ascissa ε.

Poichè è

$$\sigma \, dA = E_\varepsilon \frac{y}{r} \, dA$$

la sollecitazione su un elemento di area dA non è più proporzionale al momento statico dell'elemento rispetto all'asse neutro, perchè E_ε varia con ε e quindi con y. Non esiste quindi neppure più la relazione di antipolarità tra centro di pressione ed asse neutro.

Lo studio statico della sezione può però compiersi opportunamente in modo indiretto, partendo cioè da una determinata sezione, attribuendo al

prisma una determinata deformazione e ricavando le tensioni e poi le corrispondenti caratteristiche delle forze esterne. In sostanza il metodo da applicare è analogo a quello di SAINT-VENANT, salvo che ora, per eseguire il calcolo, occorre precisare la deformazione non soltanto qualitativamente (tipo della deformazione) ma anche quantitativamente (grandezza delle ε).

Supponiamo infatti che il prisma si deformi, come nell'abituale teoria della flessione, e sia r il raggio di curvatura della linea elastica; stabiliamo inoltre che r abbia un determinato valore. Per la [7], occorrerà ancora fissare un altro elemento e sia ε, in un determinato punto della sezione, p. es. nel punto A, su y, più lontano dell'asse x. I valori delle tensioni della sezione stessa risultano così fissati: difatti, sempre per la [7], sono determinati la posizione dell'asse neutro nonchè il valore di tutte le ε e quindi di tutte le σ nei diversi punti della sezione. In base alla prima delle [8], occorre ora eseguire gl'integrali delle quantità $\sigma b dy$ dei due segni. Tali somme delle forze elementari di segno opposto non saranno in generale eguali, onde vi sarà una risultante degli sforzi interni applicata in un punto X di immediata determinazione. Per l'equilibrio, il diagramma delle σ al quale ci riferiamo corrisponderà quindi ad una sollecitazione di sforzo normale eccentrico, nel quale la forza esterna sia applicata in X ed abbia una determinata grandezza N. È così perfettamente individuato il regime statico della sezione nella quale sia ε_A la dilatazione unitaria nel punto A, e che appartenga al prisma la cui linea elastica sia un arco di cerchio di raggio r.

Si possono ora variare gli elementi che abbiamo tenuti fissi, cioè ε_A e r. Al variare di ε_A avremo altrettanti valori di N e della distanza y_x del punto X dall'asse x, onde si possono costruire due curve di ascissa ε_A e ordinate rispettivamente N e y_x. Si può poi variare il raggio di curvatura r ed ottenere così altre curve ε_A, N e ε_A, y_x: naturalmente si può anche variare prima r e poi ε_A, e quindi tracciare alcune curve che forniscano la variazione di y_x e N funzione di r, per un determinato ε_A. È opportuno poi notare che invece di assumere come variabile ε_A, si può assumere y_A, cioè la posizione dell'asse neutro.

Poichè per ogni coppia di valori ε_A, r ovvero y_A, r si hanno determinati corrispondenti valori di y_x e di N, si possono assumere ε_A e r come coordinate, ottenendo, nel piano di tali assi, quanti punti y_x e N si vogliono. Unendo allora i punti nei quali gli y_x assumono lo stesso valore e quelli nei quali gli N assumono anch'essi lo stesso valore, avremo le curve:

$$y_x = \text{cost.} \qquad\qquad N = \text{cost.}$$

riunite in un sol diagramma e quindi di più facile uso.

Con ciò avremo compiuto lo studio di una determinata sezione; dopo di che potremo anche individuare una sezione virtuale, corrispondente alla

data, per la quale risultino ancora valevoli alcune espressioni in uso nei calcoli abituali. Fissato infatti un certo valore E^* del modulo di elasticità (p. es. quello che, in prima approssimazione, può ritenersi proprio, in regime di HOOKE, del materiale che si studia), in regime di HOOKE si avrebbe:

$$\sigma = E^* \varepsilon$$

mentre è ora

$$\sigma_\varepsilon = E_\varepsilon \varepsilon$$

e quindi

$$\sigma_\varepsilon = \sigma \frac{E_\varepsilon}{E^*}$$

Per una determinata sezione, ed in una striscia di piccola altezza, parallela all'asse x, si può ritenere costante E_ε: per tale striscia il rapporto $\frac{E_\varepsilon}{E^*}$ ha un valore determinato. Esso può assumersi come un coefficiente che affetti tale striscia, che, p. es., ne moltiplichi la larghezza. Si può dunque costruire una sezione virtuale, ottenuta da quella reale modificando la larghezza delle singole strisce come ora si è detto. Con tale trasformazione vigeranno ancora, per la sezione virtuale, alcune delle note relazioni tra forze esterne, tensioni e deformazioni.

Si può infatti porre:

$$A_v = \frac{1}{E^*} \int E_\varepsilon b \, dy$$

e similmente, per il momento d'inerzia virtuale I^*,

$$I_v = \frac{1}{E^*} \int E_\varepsilon y^2 dA \qquad [9]$$

Risulta allora:

$$M = \frac{I_v E^*}{r} \qquad [10]$$

e poi:

$$M = \frac{\sigma I_v E^*}{y E_\varepsilon} \qquad [11]$$

Le espressioni ora scritte non hanno immediato significato pratico, in quanto che sono relative ad una sezione prefissata nella quale già si conoscano le tensioni interne: note cioè queste si può p. es. esprimere la σ come nella [11]. Tuttavia esse risultano utili in alcuni casi nei quali con-

venga esprimere sinteticamente le relazioni tra M e σ, come vedremo in seguito. La [10] permette poi anche di calcolare I_v quando siano noti M, E^* ed r senza passare per la [9], che è di non agevole calcolo.

Vediamo ora come dallo studio di una sezione base si possa passare a quello di altre sezioni. Ciò è senz'altro possibile se la nuova sezione è in un determinato rapporto di affinità con quella fondamentale.

Applichiamo anzitutto un'affinità rispetto all'asse x, alteriamo cioè le dimensioni secondo l'asse y in un determinato rapporto. È facile controllare che risultano verificate le seguenti proprietà:

a) Se si chiamano A_1 e A_2 le due aree parziali nelle quali si verificano tensioni di segno opposto, il rapporto: $\dfrac{\int_{A_1} \sigma dA_1}{\int_{A_1} \sigma dA_2} = \dfrac{\int_{A_1} \sigma b dy_1}{\int_{A_1} \sigma b dy_2}$ non muta, perchè le altezze dy delle strisce elementari parallele ad x saranno alterate secondo il rapporto di affinità, che non influisce nè su b nè su σ.

b) La quantità

$$\int_{A_1} \sigma d A_1 - \int_{A_2} \sigma d A_2 = N$$

verrà ampliata secondo il rapporto di affinità introdotto, come appare subito da un ragionamento analogo al precedente.

c) La curvatura verrà ridotta nel rapporto di affinità.

d) Per la proprietà *a)*, la distanza y_x di X dell'asse neutro verrà moltiplicata per il rapporto di affinità, per la proprietà *b)*, la risultante delle forze interne verrà anch'essa moltiplicata pel rapporto detto.

La indicata trasformazione per affinità si può d'altra parte ritenere quale un modo più generale di considerare la variazione del raggio di curvatura già presa in esame più su. La differenza del caso attuale dal precedente è che ora l'altezza della sezione non è fissata, ma viene alterata nel rapporto di affinità. Facendo dunque variare tale rapporto, si avranno quante si vogliano sezioni capaci di resistere a corrispondenti valori di forze N applicate in punti X. Per ogni valore del rapporto di affinità si possono poi variare ε_A e r come detto più su.

Se si applica invece un'affinità rispetto all'asse y, alterando cioè in un determinato rapparto le dimensioni secondo l'asse x, verrà alterata nello stesso rapporto la grandezza N della risultante, ma non il punto X di applicazione di essa.

Come si vede, si hanno a disposizione le diverse variabili y, x, ε_A, r per soddisfare alle condizioni che si richiedono nel singolo caso. E cioè, riassumendo, per una determinata sezione, facendo variare la posizione dell'asse neutro e la curvatura, si ottiene, in base alla serie di diagrammi

sopra indicata, il comportamento completo della sezione sotto l'azione di varie forze N applicate in vari punti X dell'asse y. Ciò è quanto occorre e basta per la verifica di stabilità della sezione. Invece, mediante le sopra descritte trasformazioni per affinità, si può risolvere il problema del progetto, individuando facilmente la sezione resistente a determinate sollecitazioni esterne.

Dobbiamo ora richiamare particolarmente l'attenzione sul fatto che la possibilità di trasformazioni per affinità di una determinata sezione rende tutt'altro che gravoso il calcolo dei prismi in regime non di Hooke, che a prima vista può apparire molto complesso. Basta infatti aver eseguito una volta tanto, per una determinata forma di sezione, lo studio statico completo di essa, perchè possa subito risolversi il caso singolo interessante nella pratica. Ciò sarà messo in maggior luce dalle applicazioni sviluppate nel prosieguo.

Abbiamo inoltre considerato finora il caso più generale: passiamo subito a vedere ora quali semplificazioni possono riscontrarsi nei casi particolari.

5. - *Sollecitazione di flessione semplice.* Supponiamo anzitutto che il solido prismatico sia sollecitato a flessione semplice; ciò sarà lo stesso che dire che l'$\int \sigma dA$ esteso a tutta la sezione dev'essere nullo e che dev'essere anche $y_x = \infty$. Si potrà dunque determinare per tentativi, facilitati, se sembrerà il caso, da una curva d'errore, il valore di r che per ogni posizione dell'asse neutro x o per ogni valore di ε_A soddisfa le condizioni dette, e tracciare un diagramma che fornisca i valori di M e di r che si corrispondono; ovvero individuare tra le curve $N = \text{cost}$, $y_x = \text{cost}$, riferite alle coordinate ε_A (o y) e r sopramenzionate, quelle che danno $N = 0$, $y_x = \infty$. Con ciò è perfettamente definito il comportamento della sezione alla pura flessione.

In sede di progetto poi, si possono variare le dimensioni della sezione per affinità rispetto all'asse x; varierà la curvatura con legge di proporzionalità inversa, se si tien fisso ε_A, come si rileva dalla $\varepsilon = \frac{y}{r}$. Poichè le altezze delle strisce nelle quali si immagina divisa la sezione variano secondo il rapporto di affinità, e con la stessa legge variano le distanze y dall'asse x, il momento delle forze interne elementari varierà secondo il quadrato del rapporto di affinità. Partendo allora dalla sezione base, si può utilizzare il sopra detto diagramma, ad esso relativo, che, per flessione pura, dà i valori di M in funzione di r. Difatti, per una sezione le cui ordinate stiano in un determinato rapporto di affinità k con quelle della data, il momento flettente che essa potrà assorbire per ogni r sarà dato dall'ordinata corrispondente all'r della curva tracciata, ampliata secondo il quadrato del rapporto k; mentre la curvatura corrispondente avrà il valore $\frac{1}{r}$, ridotto nel rapporto k.

Anche nel caso della flessione semplice si può poi variare la sezione per affinità rispetto all'asse y, lasciando inalterati le ε e l'r, ottenendo sezioni capaci di assorbire momenti alterati secondo lo stesso rapporto di affinità.

Naturalmente così facendo non si raggiungerà, in generale, la condizione che le sollecitazioni massime dei due segni siano eguali ai rispettivi carichi di sicurezza. Anche tale condizione di equiresistenza può però ottenersi, influendo opportunamente sulle dimensioni parallele all'asse x in una delle due parti nelle quali l'asse neutro divide la sezione. Si fissa infatti a tale scopo una $\varepsilon_{A_{max}}$ che corrisponda ad una σ eguale al carico di sicurezza, e si trova il valore di r, per cui la sollecitazione in B sia anche eguale al relativo carico di sicurezza. Non sarà allora soddisfatta la condizione $\int \sigma b dy = 0$, ma si potrà cambiare la larghezza di una delle due parti nelle quali l'asse neutro divide la sezione (o soltanto quella di una striscia, p. es. la più lontana dall'asse neutro) finchè sia $\int \sigma b dy = 0$. Se il momento resistente risulta poi inadeguato, si può ricorrere alla trasformazione per affinità secondo l'asse x.

In tal modo può ritenersi compiuto lo studio di una sezione di forma qualsiasi. È possibile per conseguenza procedere al calcolo di verifica o di progetto di essa senza eccessive difficoltà, quando si seguono i procedimenti ora indicati.

6. – *Semplificazioni per sezioni di forma particolare.* Per sezioni di forma particolare si va incontro a diverse altre semplificazioni, che è quindi opportuno notare.

Supponiamo anzitutto che la sezione sia rettangolare: si può allora lasciarne indeterminata l'altezza. Segnata quindi la traccia di una sezione di larghezza prefissata e di altezza indefinita, cioè, in altri termini, un asse y, prendiamo su esso un punto, traccia dell'asse neutro x. Poichè le ε sono proporzionali alle distanze dall'asse x potremo disegnare i diagrammi σ, ε di trazione e di compressione l'uno al di sopra, l'altro al di sotto della traccia dell'asse x, prendendo l'asse y come asse delle ε. Occorrerà naturalmente individuare la legge di proporzionalità tra ε e y; a tale scopo basterà fissare un raggio di curvatura r della linea elastica assunta dalla trave, dopo la deformazione: si avrà:

$$\varepsilon = \frac{y}{r} \qquad [7]$$

Tale r potrà in un primo tempo esser posto eguale o poco diverso da quello che si avrebbe nel caso dei materiali elastici, per i quali esso è di immediata determinazione. In altri termini si può prima calcolare la sezione con le abituali formole, per avere il raggio di curvatura corrispondente ad introdurre nella [7].

Diseguiamo ora le linee integrali i e i' dei diagrammi delle σ di trazione e di compressione. A due ordinate qualsiansi dei detti diagrammi integrali, per esempio a quelle che corrispondono alla condizione che le sollecitazioni di trazione e di compressione raggiungano i rispettivi carichi di sicurezza, corrisponde un caso generico di sollecitazione di sforzo normale e flessione ed un'altezza della sezione. La risultante N degli sforzi interni sarà applicata in un punto X, e si possono trovare, al variare delle σ ammesse, diversi di tali punti e diversi corrispondenti valori di N; cambiando poi r, si potranno ottenere ancora ulteriori punti X, in corrispondenza di varie σ, ed i relativi valori di N. Dell'affinità rispetto all'asse x ci siamo intanto giovati col mantenere variabile l'altezza della sezione, ciò che ha permesso di raggiungere le sollecitazioni di sicurezza a tutti e due gli estremi della sezione.

Dato ora un punto X_1 di applicazione della forza esterna, si potrà individuare qual punto X che coincida con X_1 per il quale le σ risultino convenienti, possibilmente eguali al carico di sicurezza. Ed allora, se, come in generale avverrà, la risultante delle forze interne corrispondenti a X_1 non è eguale alla forza esterna data N_1, si potrà alterare la sezione per affinità rispetto all'asse y, fino a raggiungere tale eguaglianza.

Il caso ora studiato comprende quello della flessione semplice, per il quale occorre soddisfare la condizione $\int_A \sigma dA = 0$ ed equilibrare un determinato momento flettente esterno. È opportuno notare, per esso, qualche proprietà particolarmente semplice.

Le ordinate dei due diagrammi i, i' dovranno risultare eguali, in modo che l'area complessiva del diagramma delle σ sia nulla. A coppie di ordinate eguali corrisponderanno determinate sezioni e particolari valori del momento flettente, in relazione ai momenti delle forze interne.

Per mostrare il procedimento nella sua pratica realizzazione, nella figura 3 abbiamo tracciato un diagramma σ, ε, supponendo che per gli sforzi di trazione sia verificata la legge di Hooke, mentre ciò non accada per gli gli sforzi di compressione: sia a linea che rappresenti il comportamento del materiale a compressione, t quella che rappresenti il comportamento a trazione.

Considerando quindi il profilo della sezione e preso su esso un punto che rappresenti la traccia dell'asse neutro, abbiamo eseguito a partire da tale punto le integrazioni dei diagrammi σ, ε di trazione e di compressione, ottenendo le curve a' t'. Tutte le parallele all'asse y tagliano le curve a' t' in due punti che corrispondono ad un caso di sollecitazione di flessione semplice. Ad esempio la R segnata nella fig. 3 taglia la curva a nel punto A', la t' nel punto T': tirando da A' e T' le parallele all'asse x si ottengono sulle linee a e t due punti A e T rispettivamente, ai quali corrispondono determinate σ ed ε. Ma l'asse y può servire non soltanto

quale asse delle ε ma anche quale asse delle altezze y delle zone compresse e tese della sezione. Essendo, infatti: $y = \varepsilon\, r$, basta fissare la grandezza di r per ricavare l'altezza y di dette zone.

Nell' esempio che sviluppiamo otteniamo:

Per il punto A	$\sigma = 56$ kg/cmq	$\varepsilon = 83{,}75 \cdot 10^{-5}$
Per il punto T	$\sigma = 70{,}5$ kh/cmq	$\varepsilon = 70{,}50 \cdot 10^{-5}$

e se supponiamo che sia $r = 25000$ cm., l'altezza della zona compressa risulta:

$$y_c = \varepsilon_A\, r = 19 \text{ cm.}$$

e quella della zona tesa

$$y_t = \varepsilon_t\, r = 17{,}6 \text{ cm.}$$

Si può anche procedere inversamente, fissando per esempio σ_t e quindi y, cioè il punto T. Il punto T'' si otterrà allora tirando la T la parallela

Fig. 3.

ad x; il punto A' tirando da T' la parallela a y; il punto A tirando da A' la parallela a x.

Per avere poi la grandezza del momento resistente di una sezione per date σ, sono state tracciate le linee a'', b'', c'', integrali delle a', b', c' rispettivamente.

Una tangente generica a tali curve integrali taglia l'asse y in un punto che fornisce l'altezza y' alla quale è applicata la risultante degli degli sforzi di compressione. Poichè per la risultante degli sforzi di trazione tale altezza è sempre $y_t' = 2/3\ y_t$, si può ricavare il braccio di leva delle forze interne, che sarà $d = y'_c + y'_t$.

E poichè la grandezza delle risultanti di trazione e di compressione può anche ricavarsi dal grafico, e comunque è data, supponendo la larghezza $b = 1$, dalla

$$T = 1\ 2\ \sigma_t\ y_t$$

si ricava immediatamente il momento resistente:

$$M_r = Td$$

Per avvalerci ora delle trasformazioni per affinità sopra indicate, abbiamo tracciate nella fig. 4 le curve M, r, per una sezione di cm. 10 cm. 21,7

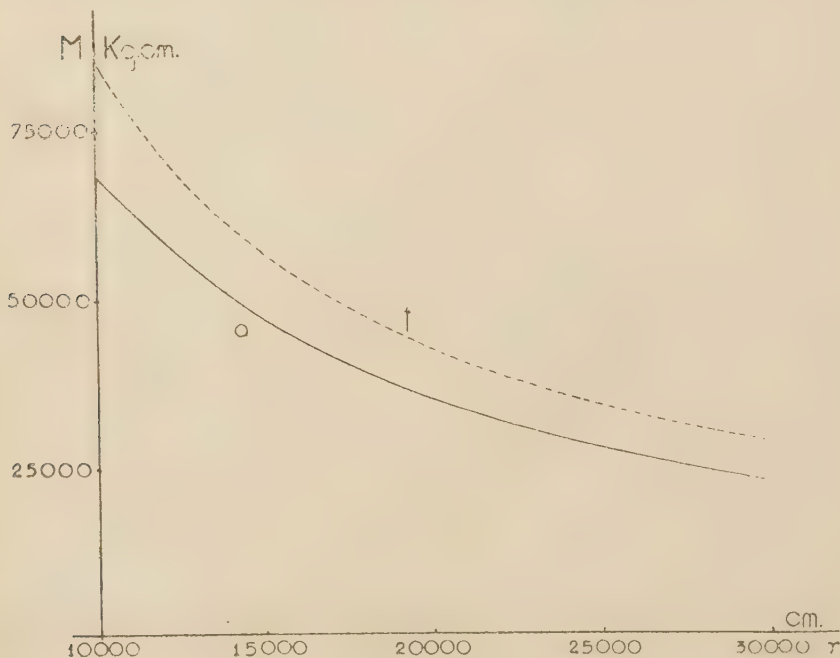



Fig. 4

costituita del materiale per cui abbiamo segnate le linee a, t, come sopra detto: per la sezione base la lettura del diagramma è immediata, giacchè ogni punto dà una coppia di valori M, r corrispondenti. Invece:

a) per sezioni che abbiano la stessa altezza della data e $b_1 = k_1 b$ (trasformazione per affinità rispetto all'asse y), si avrà per il corrispondente momento resistente M_{b_1} e per il corrispondente raggio di curvatura r_1 rispettivamente:

$$M_{b_1} = k_1 M_b \qquad e \qquad r_1 = r$$

b) per sezioni che abbiano la stessa larghezza b e un'altezza $h_1 = k_2 h$ (trasformazione per affinità rispetto all'asse x) si avrà ovviamente:

$$M_{b_1} = k_2^2 M_b \qquad e \qquad r_1 = k_2 r$$

c) per sezioni, infine, che stiano in un determinato rapporto di omotetia k_3 con quella data sarà:

$$M_r = k_3^3 M \qquad e \qquad r_1 = k_3 r$$

E per conseguenza, se, fissate le σ ammissibili, si vuole determinare la sezione necessaria per resistere ad momento flettente dato M_f che sia in rapporto col momento resistente M_r corrispondente alla sezione fondamentale dato da

$$k_4 = \frac{M_f}{M_r}$$

si può:

a) o variare la larghezza b della sezione assumendone una $b_1 = k_4 b$;
b) o variare l'altezza h, assumendone una $h_1 = \sqrt{k_4}\, h$
c) o variare la sezione omoteticamente, assumendone una che stia con la data in un rapporto di omotetia dato da $\sqrt[3]{k_4}$.

7\. — *Caso del calcestruzzo cementizio armato.* Quanto abbiamo detto si può applicare al caso in cui il solido prismatico in esame sia costituito di calcestruzzo cementizio armato: il problema si presenta però un po' diversamente.

In tal caso la linea l ha significato, com'è notissimo, soltanto in corrispondenza della zona nella quale sono collocate le armature. La linea integrale l' perde anch'essa il suo significato e viene praticamente sostituita dal prodotto dell'area complessiva ω dei tondini tesi per la corrispondente tensione σ_f.

Si procederà quindi nel seguente modo.

Fissato un σ_{max} per il calcestruzzo e un determinato r, si avrà l'altezza y_c della zona compressa, la grandezza R_c della risultante di compressione, la posizione del punto C in cui essa è applicata e la relativa distanza y_c' dall'asse neutro.

Rimane per conseguenza fissata la grandezza della risultante di trazione

$$R_t = R_c - \sigma_t \omega$$

Dato poi il momento flettente esterno, si ricava subito il braccio della coppia interna:

$$d = \frac{M_f}{R_c}$$

Poi è

$$\varepsilon_t = \varepsilon_c \frac{h' - y_c}{y_c}$$

Ed essendo ovviamente:

$$h' = d - y_c' + y$$

si ha:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_c \frac{d - y'_c}{y_c}$$

Per conseguenza la σ_f per la quale è

$$\sigma_f = E_t \varepsilon_t$$

rimane fissata. Può quindi ora calcolarsi ω.

Anche in tal caso, com'era prevedibile, non si raggiunge, in generale, la condizione di equiresistenza.

8. — *Sollecitazione di taglio e torsione.* Supponiamo che, come spesso accade, alla sollecitazione di flessione si accompagni quella di taglio.

In correlazione con la trattazione approssimata del taglio per i solidi di HOOKE, si considerino due sezioni trasversali del solido prismatico, a distanza dx. Nel passare dalla prima alla seconda sezione, si può ammettere che, data la piccolezza di dx, si abbia per le σ_z:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{dM}{dz} \frac{y}{I_v} \frac{E_\varepsilon}{E^*} = \frac{Ty}{I_v} \frac{E_\varepsilon}{E^*} \qquad [12]$$

cioè E_ε abbia lo stesso valore nei punti corrispondenti di due sezioni a distanza dx. Si avrà allora per l'equilibrio:

$$\tau_{yz} b\, dz = dz \int_{A_p} \frac{T_y}{I_v} \frac{E_\varepsilon}{E^*} dA = \frac{T}{E^* I_v} \int_{A_p} E_\varepsilon y\, dA \qquad \text{donde } \tau_{yz} = \frac{TM_v}{b I_v} \qquad [13]$$

dove A_p è la parte dell'area totale della sezione, rispetto alla quale si considera l'equilibrio, cioè quella compresa tra la corda generica e il con-

torno della sezione, e dove si è posto:

$$M_v = \frac{1}{E^*} \int_{A_p} E_\varepsilon y \, dA \qquad [14]$$

Ed essendo

$$I_v = \frac{1}{E^*} \int_A E_\varepsilon y^2 \, dA$$

risulta:

$$\tau_{yz} = \frac{T}{b} \frac{\int_A E_\varepsilon y \, dA}{\int_{A_p} E_\varepsilon y^2 \, dA} \qquad [15]$$

Per conseguenza il diagramma delle τ_{yz} non risulta più parabolico. M_v è poi il momento statico virtuale della parte di sezione compresa tra la corda generica ed il contorno.

Appare qui l'utilità, che si presenta anche in altri casi, dell'introduzione di momento statico e momento d'inerzia virtuali.

Ove la [12] non sia ammissibile (nel caso in cui p. es. E abbia delle forti variazioni) l'espressione della τ_{yz} si complica. Ma si può allora opportunamente procedere per via grafica, disegnando i vari diagrammi della σ_z nelle varie sezioni a distanza Δz fino alla corda al livello della quale si vuole determinare la τ_{yz} e ricavando poi le differenze tra essi, che forniranno direttamente i valori delle τ_{yz}. Si potrà anche disegnare un ulteriore diagramma di tali differenze in funzione di z ottenendo nell'area di esso, quindi nelle ordinate del suo diagramma integrale, i valori totali delle tensioni tangenziali per tratti di lunghezza z del prisma in esame.

La trattazione della sollecitazione di torsione presenta poi una notevole analogia con quella della flessione. Limitando la nostra ricerca al caso in cui il solido sia un cilindro circolare retto, avremo per lo scorrimento γ, come nel caso abituale:

$$\gamma = \frac{\rho \vartheta}{\Delta z}$$

se Δz è la distanza tra due sezioni del cilindro, che rotino dell'angolo ϑ l'una rispetto all'altra, e se ρ è la distanza di un punto generico della seconda sezione dal centro O di essa.

Risulta poi ora:

$$\tau_z = G_\gamma \frac{\rho \vartheta}{\Delta z} \qquad [16]$$

dove G_γ è funzione di γ come prima era E_ε funzione di ε. Poichè, come è

noto, G è legato ad E mediante il modulo di POISSON m, se si ammette, com'è da ritenersi legittimo, che m sia costante per un determinato materiale, possono senz'altro determinarsi i valori di G corrispondenti a quelli di E; d'altra parte essendo i valori di ε legati a quelli di γ, riesce facile stabilire la relazione tra G e γ.

Si ha poi, per l'equilibrio:

$$M_t = \int_A \tau_z \rho \, dA = \int G \frac{\rho \vartheta}{\Delta z} dA = G I_{vp} \frac{\vartheta}{\Delta z} \qquad [17]$$

avendo posto:

$$I_{vp} = \frac{I}{G^*} \int G_\gamma \rho^2 \, dA \qquad [18]$$

E per conseguenza:

$$\tau_z = \frac{G_\gamma}{G^*} \frac{M_z}{I_{vp}} \rho \qquad [19]$$

Tale espressione corrisponde all'analoga [11] che dà la σ nella sollecitazione di flessione, e, come quella, non ha un immediato valore pratico, perchè la G_γ che vi compare esplicitamente e implicitamente in I_v dipende da γ ed è quindi calcolabile quando sia già noto il regime statico della sezione, come si è specificato per la [11].

Per lo studio di tale regime statico si dovrà invece procedere analogamente a quanto si è specificato per la flessione. Si può fissare la quantità $\frac{\vartheta}{\Delta_z} = \frac{\gamma}{\rho}$ (analoga alla $\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{y}$): per i diversi valori di essa si avranno allora i corrispondenti valori di γ e poi di G_γ (calcolati attraverso ε ed E, come sopra detto) e quindi delle τ_z. Si può allora costruire il diagramma delle τ_z lungo un diametro della sezione. Per via analitica e per via grafica si può calcolare l'espressione:

$$\int \tau_z \rho \, dA = \int \left(\tau_{yz} x - \tau_{zx} y \right) dA$$

ed avere con ciò il momento torcente al quale una data sezione è idonea a resistere. Al variare della quantità $\frac{\vartheta}{\Delta z}$ si avrà una serie di valori di M_t relativa ad una sezione: vi corrisponderanno, naturalmente, diversi valori della τ_{max}.

La sezione potrà poi trasformarsi per omotetia: è facile vedere, analogamente a quanto dicemmo per la flessione, che il momento delle tensioni interne varierà secondo il cubo di detto rapporto. Si possono così esten-

dere i risultati dello studio compiuto per una sezione a qualunque altra purchè circolare. Anche ora, per conseguenza, il metodo di calcolo che a prima vista può apparire notevolmente complesso, si rivela invece semplice, perchè basta eseguire lo studio di una sola sezione, presa come fondamentale.

9. — *Calcolo delle deformazioni. a)* Sforzo normale. — Le deformazioni si calcolano con l'abituale espressione

$$\Delta l = \frac{Nl}{E_\varepsilon A} = \frac{Nl}{E^* A_v} \qquad [20]$$

dove però E_ε è il l'originario corrispondente a N, cioè a $\sigma = \frac{N}{A}$, e A_v è la sezione virtuale.

b) Flessione. — La rotazione elementare $d\varphi$ sarà espressa ancora da:

$$d\varphi = \frac{dx}{r} \qquad [21]$$

ma in essa ad $\frac{1}{r}$ bisognerà dare il valore corrispondente al momento flettente M, valore che si determina immediatamente quando siano tracciate le curve M, r sopra indicate.

Abbiamo anche trovato più su che è:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E^* I_v}$$

onde possiamo anche scrivere:

$$d\varphi = \frac{M\,dx}{E^* I_v} \qquad [22]$$

espressione analoga all'abituale, ma nella quale I_v dipende dai valori di E_ε, come detto al n. 4. Tale espressione però, come le analoghe sopra determinate, ha però un valore puramente simbolico, perchè per poterne calcolare il valore bisogna già conoscere il regime statico della sezione; praticamente bisogna, come si è detto, trovare i valori di $\frac{1}{r}$ e ε corrispondenti al momento flettente dato: verranno quindi determinate le ε e poi le σ ai diversi livelli y della sezione. Ciò fatto potrà calcolarsi la [23]; la quale è quindi utilizzabile soltanto nei calcoli di verifica, nelle applicazioni alla determinazione delle incognite iperstatiche, come subito vedremo.

10. — *Determinazione delle incognite iperstatiche.* Come abbiamo detto al n. 3, il teorema dei lavori virtuali è tuttora applicabile: si tratterà

ancora di combinare le deformazioni effettive con le sollecitazioni fittizie $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ ecc.

Per esempio, in una travatura reticolare con un vincolo esterno rigido sovrabbondante (arco a due cerniere ecc.) si potrà ancora scrivere:

$$\Sigma\, N' \Delta l = 0 \qquad [23]$$

nella quale N' è sempre lo sforzo prodotto in un'asta generica dalla sollecitazione $X = 1$, e Δl è la deformazione effettiva. Per calcolare quindi i Δl occorrerà applicare la [20] nella quale E_ε avrà il valore corrispondente a N, come si è detto più su. Tale valore è, all'inizio, incognito; onde bisognerà attribuire un valore di tentativo ad X, calcolare in relazione N e poi Δl, e così applicare la [23]. Per il calcolo della N si applica ancora l'espressione

$$N = N_o + N'X$$

perchè, come si è detto al n. 3, il principio di sovrapposizione degli effetti è tuttora applicabile alle forze esterne o quelle considerate come tali, quali la X nella precedente. Eseguendo gli abituali sviluppi, si avrà quindi ancora:

$$\Sigma\, \frac{N_o\, N'l}{E^*\, A_v} + X \Sigma \frac{N'^2 l}{E^* A_v} = 0 \qquad [24]$$

equazione che solo apparentemente è lineare in X, dato che invece A_v è funzione di X. Mediante la [24] si calcolerà quindi un valore di X che risulterà in generale diverso da quello supposto per il calcolo dei Δ l. Sarà necessario dunque applicare un metodo di iterazione fino a raggingere un valore di X poco diverso dal precedente.

Analoghe considerazioni vanno fatte per i solidi a parete piena, per i quali si dovrà porre, per una sola incognita iperstatica e per vincoli rigidi, tenendo conto della sola flessione:

$$\int M' d\varphi = 0 \qquad [25]$$

essendo $d\varphi$ data dalla [22], che viene ora utilizzata, e corrisponde quindi ad M. E poichè è anche ora:

$$M = M_o + M'X$$

è quindi, come nel caso precedente:

$$\int \frac{M_o\, M' dx}{E^*\, I_v} + X \int \frac{M'^2 dx}{E^*\, I_v} = 0 \qquad [26]$$

equazione anch'essa solo apparentemente lineare in X, essendo I_r funzione di X: tale valore di I_r è quello che corrisponde al valore totale M, non ai parziali M_o e M'.

Il fatto che le due equazioni [24] e [26] non sono lineari nell'incognita sembra indurre una grande complicazione: ma ciò non è. In realtà le [24] e [26] sono le stesse abitualmente usate, con significato però più ampio e generale. Anche nei casi abituali, A e I sono funzioni di X attraverso le equazioni di stabilità, onde il calcolo si riduce sempre ad essere di verifica e si effettua mediante successive approssimazioni.

Il caso che studiamo si distingue dunque dall'abituale perchè la funzione che lega A e I a X è diversa dalla consueta e, potremo dire, più generale, in quanto A e I sono legate ad X non soltanto attraverso le equazioni di stabilità, ma anche attraverso la variazione di E.

Nella pratica si potrà cominciare appunto col supporre E costante (p. es. avente il valore che si applica abitualmente per il materiale in oggetto) ed I proporzionale ad X nel modo solito. Con successive iterazioni si potrà poi pervenire alla soluzione esatta o sufficientemente approssimata.

Vi è dunque una maggiore complessità di calcolo rispetto al metodo abituale, ma non eccessiva, nè, ciò che più importa, comportante un notevole cambiamento nel modo di sviluppo del calcolo stesso.

Ma possiamo precedere anche un po' diversamente. Come abbiamo detto, è possibile prevedere con una certa approssimazione, che poi verrà verificata dal prosieguo del procedimento, il valore dell'incognita iperstatica; chiamiamo X' tale valore. In relazione ad esso, si potrà calcolare la deformazione corrispondente; p. es. se si tratta di una travatura reticolare, si calcolerà il $(\Delta l)'$ corrispondente: secondo le notazioni precedenti esso è dato da $\frac{Nl}{EA}$ dove per E comparirà il valore del modulo di elasticità relativo a $\sigma = \frac{N}{A}$, essendo il N valore, corrispondente a X', dello sforzo in un'asta. Il valore effettivo di X sarà:

$$X = X' + \Delta X'$$

chiamando $\Delta X'$ l'incremento positivo o negativo di X' che supponiamo contenuto in limiti ristretti. In tali limiti varierà anche la sollecitazione $N' X'$ nelle singole aste, e potremo ritenere che il materiale si comporti come nel campo elastico, con la sola differenza che il relativo modulo di elasticità sarà quello istantaneo corrispondente al valore X' o quello medio corrispondente alla variazione $\Delta X'$. La deformazione totale sarà:

$$\Delta l = (\Delta l)' + \Delta X' \frac{N' l}{E_{ist} A}$$

Per il teorema dei lavori virtuali è poi:

$$\Sigma N' \Delta l = 0$$

se i vincoli sono rigidi. Sviluppando si ha:

$$\Sigma N' (\Delta l)' + \Delta X' \Sigma \frac{N'^2 l}{E_{ist} A} = 0$$

da cui:

$$\Delta X' = - \frac{\Sigma N' (\Delta l)'}{\Sigma \frac{N'^2 l}{E_{ist} A}}$$

Se il valore di $\Delta X'$ così calcolato è piccolo, in modo che possa ritenersi che vi corrisponda effettivamente il valore supposto di E, il problema è risolto; altrimenti si eseguirà un nuovo tentativo, partendo dal valore già trovato. Ma i tentativi saranno in numero minore che non col metodo precedente.

Se il solido è sollecitato a flessione, si avrà analogamente:

$$d\varphi = (d\varphi)' + \Delta X' \frac{M' dx}{E_{ist} I}$$

dove $(d\varphi)'$ ha il valore corrispondente all'X di primo tentative, dal calcolarsi nel modo specificato più su, come nella (6), e l'I del 2.° termine ha il valore abituale, dato che nel tratto che consideriamo riteniamo che il materiale si comporti come di solito, però con un corrispondente modulo di elasticità, medio nell'intervallo di variazione relativo a $\Delta X'$.

E quindi, di seguito:

$$0 = \int M' d\varphi = \int M' (d\varphi)' + \Delta X \int \frac{M'^2 dx}{E_{ist} I}$$

$$\Delta X' = - \frac{\int M' (d\varphi)'}{\int \frac{M'^2 dx}{E_{ist} I}}$$

E tale valore $\Delta X'$ dev'essere, come sopra detto, sufficientemente piccolo.

Considerazioni perfettamente analoghe valgono se le incognite iperstatiche sono più d'una.

Sarebbe soddisfacente esprimere esplicitamente la dipendenza di E e di I da M, precisare cioè le funzioni E_M e I_M e far risultare la non linearità dell'equazione (26). Ma nel caso generale ciò darebbe luogo ad espres

sioni troppo complicate, specie se, come spesso accade, il diagramma σ, ε non ha una forma facilmente traducibile in una relazione analitica.

Svolgiamo ora qualche esempio di determinazione di incognite iperstatiche, dal quale risultino le diverse operazioni da compiere nella pratica.

a) — Arco reticolare a due cerniere. — L'iperstatica è notoriamente una sola, la componente orizzontale X delle reazioni degli appoggi (eguale per i due appoggi, se i carichi sono verticali).

Si dia ad X un valore di primo tentativo, p. es. quello determinato in regime di Hooke, od anche, poichè la determinazione di questo richiederebbe per suo conto l'esecuzione di diversi tentativi, altro di più immediata determinazione, ottenuto, in regime di Hooke, dando particolari valori alle aree A. Si saranno intanto calcolati, per ogni asta, i valori N_0 e N'.

Si calcolino ora, sempre per ogni asta, le tensioni σ e, servendosi della curva σ, ε le ε quindi i $\Delta l = \varepsilon l$, e si dividano tali quantità per i rispettivi N ottenendo le espressioni $\frac{l}{EA}$. Si formino poi le sommatorie $\Sigma N_0 N' \frac{l}{EA}$ e $\Sigma N'^2 \frac{l}{EA}$ e si calcolino i rispettivi valori di esse. Il rapporto tra il valore della prima e quello della seconda, col segno cambiato, darà un nuovo valore di X. Se, come in generale accadrà, questo non coincide con quello di primo tentativo supposto in principio, si ripeterà il calcolo partendo dal nuovo valore di X determinato, e così via fino ad ottenere un valore di X che si discosti pochissimo dal precedente.

b) — Trave incastrata ad un estremo ed appoggiata nell'altro. — Anche ora l'iperstatica è una sola, p. es. la reazione X dell'appoggio.

Si dia ad X un valore di primo tentativo, p. es. quelle determinato in regime di Hooke, e si disegni, in base ad esso, un primo diagramma dei momenti flettenti M_f. Si calcoli per ogni valore di M_f il corrispondente valore di $\frac{1}{r}$. Ciò si compie servendosi del diagramma M, r segnato nella fig. 4 nel seguente modo: si trovano i rapporti di affinità od omotetia necessari per passare dalla sezione della trave che calcoliamo a quella che è servita di base per la costruzione del diagramma: per fissare le idee, supponiamo che interceda tra la prima e la seconda sezione un rapporto di omotetia k_0 e uno di affinità, in direzione dell'asse y, k_a. Allora, per quanto detto al n. 6, se in una sezione s della trave il momento flettente è M_f, lo si moltiplichi per $k_0^3\ k_a^2$ ottenendo il valore M_s. Nella curva tracciata in fig. 4 si cerchi il valore r corrispondente a M_s: esso sarà il raggio di curvatura relativo alla sezione s. Si moltiplichi tale raggio di curvatura per il momento M_s, ottenendo così la quantità $E^* I_n$.

In corrispondenza della stessa sezione s si calcolino poi, se ancora non si è fatto, i valori di M' e M_0 che, com'è notissimo, sono i momenti flet-

tenti provocati nella sezione rispettivamente dalla $X=1$ e dai carichi agenti, sul sistema principale.

Si possono allora calcolare le quantità $\frac{M_0 M'}{E^* I_n}$ e $\frac{M'^2}{E^* I_n}$ e, ripetendo per diverse sezioni le operazioni indicate, costruire un primo e un secondo diagramma relativi rispettivamente alla 1ª e alla 2ª di dette quantità, in funzione di x. Si calcolino infine le aree di tali diagrammi, (p. es. mediante l'integrazione grafica o la formola di Simpson) e si faccia il rapporto tra la 1ª e la 2ª area: questo, col segno mutato, darà il valore di X.

Poichè tale valore sarà in generale diverso da quello di partenza, occorrerà ripetere le operazioni indicate, col nuovo valore di X; e così via finchè due successivi valori di X differiscono di molto poco.

Abbiamo così esposta la via generale che può seguirsi in ogni caso, anche quindi in quelli più complessi. Ma è facile vedere invece che nel caso particolare semplice che studiamo può seguirsi una via più breve.

Basta infatti riflettere che l'esistenza dell'appoggio sovrabbondante impone la condizione che sia ivi nulla la freccia. Calcolati i valori di r come sopra indicati, in base ad un valore iniziale di X, possiamo disegnare un diagramma delle curvature delle diverse sezioni, cioè in funzione di x. Integrando due volte tale diagramma si determinerà la freccia di estremità che, come si è detto, dev'essere nulla; se invece, come in generale sarà, ciò non si verifica, si varierà il valore di X eseguendo un ulteriore tentativo, e, mediante una curva d'errore, si potrà trovare con pochi tentativi il vero valore dell'incognita.

c) — Similmente, per una trave incastrata agli estremi e con carico simmetrico, nella quale è ancora una sola l'incognita iperstatica, si può procedere nel modo generale sopra indicato, ovvero come segue.

Trovata la superficie semplice dei momenti, si segni una retta di chiusa di tentativo che determini momenti eguali ai due estremi della trave. Individuato il diagramma delle curvature, come sopra detto, si proceda alla doppia integrazione di esso, ottenendo la linea elastica: la tangente di estremità e quella nella sezione di mezzeria devono risultare parallele. Ove ciò non si verifichi, si eseguirà qualche ulteriore tentativo servendosi sempre di una curva d'errore. Per la simmetria, le operazioni possono poi evidentemente limitarsi a metà trave.

Sempre in modo analogo possono risolversi il caso della trave continua su tre appoggi, ed altri simili, onde non vi insistiamo ulteriormente.

11. — *Conclusioni.* — Con quanto precedentemente esposto, crediamo di aver impostati e risolti, con la dovuta generalità e nello stesso tempo con spirito di praticità, i principali problemi relativi alla statica dei solidi prismatici non seguenti la legge di Hooke, nel campo elastico. Abbiamo anche mostrato che i calcoli necessari, se pure inevitabilmente più complessi di

quelli che si svolgono nei casi ordinari, sono ancora effettuabili senza grandi difficoltà, anzi possono eseguirsi rapidamente quando si sia in possesso dei risultati dello studio sopra specificato, relativo a possibili forme di sezione. E poichè tale studio, come già abbiamo detto, può compiersi una volta tanto, il vantaggio dell'applicazione dei metodi sopra esposti risulta in pratica particolarmente notevole.

PARTE SECONDA

Prismi sollecitati nel campo plastico.

12. — Nella prima parte abbiamo ritenuto inesistente, nella deformazione dei prismi, il periodo detto di proporzionalità: ha perduto per conseguenza ogni significato il cosiddetto limite di proporzionalità.

È notissimo intanto che l'elasticità di un materiale è proprietà affatto distinta dalla proporzionalità sopra detta e che diverso è il limite di elasticità, diverso quello di proporzionalità. Noi abbiamo finora supposto, nelle pagine precedenti, che non vengano mutate le proprietà elastiche del materiale che studiamo.

Vogliamo ora prendere in esame la possibilità del verificarsi di deformazioni non elastiche, o, come abitualmente si dice, plastiche, e l'influenza di tale fatto sulla statica dei solidi nella forma generale nella quale l'abbiamo precedentemente studiata.

La mancanza di elasticità significa che, al cessare delle forze esterne che hanno prodotta una determinata deformazione, la deformazione stessa non scompare. Se dunque, per una qualsiasi causa, un corpo è stato sollecitato oltre il limite elastico, esso conserverà sempre, anche se son venute meno le cause che l'hanno prodotte, una determinata deformazione plastica. Dal punto di vista statico è dunque come se nel corpo detto fosse stata introdotta una determinata deformazione. Si tratta dunque, come si vede, di quel che abitualmente si chiama distorsione.

Diversi ed eminenti studiosi hanno preso in esame tale aspetto della plasticità, ne hanno date le leggi fondamentali e hanno determinate le espressioni analitiche che corrispondono a tali leggi e permettono di eseguire i calcoli statici.

Ma, come si vede da quanto veniamo dicendo, perchè si risenta l'effetto della deformazione plastica come una distorsione è necessario che alla fase ascendente di deformazioni del corpo sia effettivamente successa una fase discendente. In altri termini la plasticità è un fenomeno irriversibile, e l'irriversibilità si manifesta ed ha significato appunto nella fase di « ritorno ».

Se invece la fase di ritorno non ha luogo, perchè le forze applicate non cessano di agire nè diminuiscono di intensità, i concetti di elasticità

e di plasticità perdono il loro significato. Rimane invece valido il concetto che la relazione tra sforzi e deformazioni non può esprimersi in modo troppo semplice e particolare (p. es. mediante l'abituale legge lineare) ma sarà rappresentata da una legge generale che va considerata e trattata come noi abbiamo fatto nelle pagine che precedono.

Ciò equivale a dire che lo studio che noi abbiamo condotto, e nel quale abbiamo presa come base una legge σ, ε assolutamente qualsiasi, e relativo anche al campo delle deformazioni plastiche, sempre che non si sia verificato il discarico della struttura, la fase di ritorno nella deformazione. Difatti tale campo delle deformazioni plastiche non si distingue in nessun modo da quello delle elastiche, nella fase ascendente del fenomeno. Che eventualmente una parte almeno delle deformazioni prodottesi sia di natura plastica e non elastica non ha alcuna conseguenza sul regime statico della struttura, finchè questa è sotto l' azione degli stessi carichi che hanno prodotto tali deformazioni, o di carichi crescenti.

Nè può certo pensarsi che tale circostanza rappresenti un' eccezione; anzi può affermarsi piuttosto il contrario. Tanto più che, passando ora dal campo teorico a quello pratico, e chiaro che può anche esser mitigata la categoricità delle precedenti asserzioni in questo senso: che, se anche in pratica qualche discarico della struttura si verifica facilmente, e ovvio che basta che l'entità di esso sia piccola di fronte a quella della sollecitazione totale. Ora numerosissime sono, specie nel campo dell'edilizia, le strutture nelle quali l'importanza dei carichi fissi rispetto ai totali è assolutamente preponderante.

E vi è ancora un altro elemento favorevole all'applicazione della teoria che precede, sebbene esso meriti ulteriore conferma. Si ammette cioe da alcuni che le deformazioni plastiche si verifichino solo o principalmente per effetto dei carichi fissi, dato che i carichi accidentali o mobili spesso non agirebbero per un tempo sufficiente a produrre deformazioni plastiche. Ma in ogni caso, anche quando si produce il discarico della struttura, il fenomeno avrà precedentemente assunto, nella fase di carico, caratteristiche del tipo da noi più su preso in esame, e andrà quindi trattato secondo i metodi sopra esposti.

E ciò comporta anche un' altra conseguenza, di notevolissima importanza. Che cioè, anche quando si debba introdurre una distorsione, per tener conto di una deformazione residua, è chiaro che tale introduzione va fatta nella teoria statica più generale, alla quale ha obbedito il solido che si studia in tutta la fase ascendente del fenomeno che precede quella nella quale si può considerare introdotta la distorsione, fase che ha superato il limite elastico e va quindi trattata nel modo da noi espresso.

Per conseguenza, e per conchiudere, ci sembra che i concetti sopra esposti presentino la massima generalità possibile, e possano quindi servire di base allo studio di ogni e di qualsiasi parte dei fenomeni di deformazione, sul quale studio è fondata la statica delle costruzioni.

Le tre primitive specie umane

Nota del socio straniero Dott. **George Robert Gayre**

(Adunanza del dì 19 febbraio 1944)

Sunto. — La presente conferenza, tenuta nell'adunanza plenaria della Società Reale il 19 febbraio 1944, è parte di un capitolo del grande trattato di Antropologia del Col. George Robert Gayre dal titolo « Fondamento razziale degli Anglo-Sassoni ». Il Dott. Gayre stabilisce un parallelo tra i gruppi sanguign; ed i caratteri antropologici degli individui ed i punti della terra percorsi dai loro progenitori. Da questo parallelo sorge un'affascinante teoria che permette di risalire alle origini delle razze umane.

In una conferenza letta all'Accademia Peloritana di Messina si è data una nuova interpretazione del concetto di gruppi sanguigni. Se tale teoria sarà accettata, essa rivoluzionerà completamente le nostre idee sulle razze umane. Ecco un breve sommario dei fatti fondamentali esposti nella mia conferenza all'Accademia Peloritana :

I gruppi sanguigni rappresentano — è certo — fattori ereditari, ma fino ad oggi nessun effettivo rapporto è stato possibile accertare tra la distribuzione di essi ed i fenomeni antropologici. Ne è risultato che alcuni investigatori, per la fiducia nelle loro osservazioni relative ai gruppi sanguigni, sono stati indotti a lanciare l'ombra del disprezzo sui metodi ortodossi degli antropologi e sugli altri finora utilizzati nel passato da tutti i grandi naturalisti.

Tuttavia mi pare che potrò dimostrare nel corso di questa conferenza, che rappresenta il risultato di lunghe personali ricerche, che una chiara correlazione esiste tra i gruppi sanguigni ed altri caratteri razziali, e che per essa noi siamo oggi almeno in grado di stabilire con maggiore esattezza di quanto prima d'ora non sia stato possibile una sana teoria per i raggruppamenti originari. Ma anzitutto un avvertimento è necessario.

Gli studiosi entusiasti delle osservazioni sui gruppi sanguigni sono spesso indotti a trascurare il fatto che i gruppi O A B, che sono quelli di cui principalmente dovremo occuparci, derivano solo da una delle 24 coppie di cromosomi di cui ogni essere umano dispone e che pertanto essi non possono servire ad illuminare da soli l'intero tipo razziale di una determinata persona. Il gruppo sanguigno rappresenta un carattere ereditario, ma uno solo, ed esso deve essere considerato non da solo ma nell'insieme di tutti i caratteri razziali ; e poichè molti individui derivano da incroci

e evidente che mentre il gruppo sanguigno si riferisce ad un determinato atavismo razziale, altri caratteri, quali la pelle, i capelli, gli occhi, o il cranio, possono richiamare la nostra attenzione su altre e ben diverse derivazioni.

Per ben comprendere l'attuale distribuzione dei gruppi sanguigni una teoria è indispensabile, che sia coerente con l'evidenza generale antropologica. Nel processo dello sviluppo umano diverse razze originarie vi furono, che forse meriterebbero addirittura di essere chiamate specie, delle quali tre sono sopravvissute: la Caucasica, la Mongoloide e la Melanoide Quest'ultima comprende le razze negroidi ed australoidi. E, proprio come le razze o specie di antropoidi, quei ceppi originari sono caratterizzati da un determinato gruppo sanguigno. Oggi il ceppo caucasico ci appare caratterizzato dai gruppi O ed A, il mongoloide dai gruppi O e B, il melanoide da O ed A. Ma in origine la situazione era certamente diversa ed è molto probabile che effettivamente tutti e tre i ceppi originariamente appartenessero al gruppo O come da BERNSTEIN e da SNYDER è stato sostenuto. L'osservazione del LATTES che i gruppi A e B sono stati rinvenuti nelle scimmie antropoidi non mi pare che possa rappresentare una seria obbiezione a questo modo di vedere, potendosi evidentemente trattare di evoluzioni parallele. In uno stadio molto primitivo una mutazione A avvenne nella razza o specie melanoide (negra). Ciò spiega la diffusione geografica del negro, caratterizzata dal predominio del gruppo O alla periferia e dalla forte percentuale del gruppo A verso il centro.

Uno dei tipi primordiali della razza negra fu l'uomo di Neanderthal in Europa. Possiamo sospettare che in origine fosse principalmente rappresentato il gruppo O ed in seguito poi, a mutazione avvenuta, prevalesse il gruppo A. Ne segue, nella distribuzione geografica nelle diverse zone, che l'elemento A deve essere scarso o addirittura inesistente là dove si trovano residui molto limitati del negro, in Europa, nell'Africa settentrionale ed occidentale, nell'Asia settentrionale e nell'America meridionale; e che viceversa in corrispondenza del punto focale della distribuzione della razza negra, cioè nelle regioni tropicali del Pacifico occidentale, quali l'Australia, e lungo la costa orientale dell'Asia fino all'America settentrionale da un lato, e fino all'India dall'altro, deve tenersi ad una decisa prevalenza del gruppo A. Ciò risulta evidente se appunto noi assumiamo che la mutazione avvenne da O ad A, e che fu proprio la razza caratterizzata dal gruppo A quella che si stabilizzò nella terra centrale da cui poi il ceppo nero partì e si diffuse. In conseguenza di questa teoria siamo portati a considerare il giallo-nero dell'Australia come un rappresentante puro dell'antica razza o specie melanoide. Siamo portati a considerare come appartenenti al gruppo O tutti i melanoidi primitivi. Dopo la separazione dei due rami, il negroide e l'australoide, si manifestò in quest'ultimo la tendenza allo sviluppo del gruppo A. Ma probabilmente non tutti gli austra-

loidi appartennero al gruppo A, e *forse* qualcuno del primitivo tipo Neanderthal ancora apparteneva al gruppo O. È quando gli australoidi si stabilirono in terre isolate, principalmente in Australia, che quivi sempre più pronunziato si manifestò il carattere A del gruppo sanguigno.

Possiamo ammettere che anche nei più antichi mongoloidi, parallelamente a ciò che accadeva nella razza melanoide, un solo gruppo sanguigno esistesse, il gruppo O. Una conferma di ciò troviamo nel fatto che gli amerindi, i quali nel loro aspetto fisico ed in molti dei loro caratteri, si rivelano di origine mongoloide, poco o nulla presentano del gruppo B. Sembra che i pellirosse diramassero dal tronco principale del genere umano prima ancora che avvenisse la comparsa degli agglutinogeni nel sangue; cosicchè la presenza di questi nel sangue di alcuni amerindi deve attribuirsi all'incrocio con europei. Anche nella direzione opposta, a pari distanza dalla terra centrale (in Asia), troviamo molto scarso il gruppo B in ceppi tipicamente mongoloidi, come per esempio nei lapponi.

Più tardi tuttavia, così come accadde la mutazione A nella razza melanoide, ebbe luogo la mutazione B nella mongoloide. A parer mio essa dovette verificarsi nella regione originaria dove più densamente i mongoloidi si erano insediati, cioè a sud del sistema montuoso asiatico.

Gradualmente muovendosi verso occidente, i mongoloidi si mescolavano con negroidi ed australoidi; così pure gradualmente nella stessa patria di origine dei mongoloidi un simile processo di mescolanza aveva luogo per opera di elementi provenienti dal sud. Ciò probabilmente avvenne nell'epoca glaciale in connessione con lo spostamento verso nord dei tropici durante qualcuna delle loro frequenti oscillazioni. Come risultato troviamo nell'India settentrionale un ceppo con elevata percentuale di gruppo B a forte tendenza brachicefalica, esattamente come in Africa. Ma la percentuale del gruppo B si rivela in quella più elevata che in questa, poichè quella regione appartiene alla parte sud-occidentale dell'antica patria di origine dei mongoloidi dove il gruppo B aveva raggiunto elevate proporzioni.

Il grande sistema montuoso dell'Asia centrale esercitò notevole influenza sulla distribuzione dei gruppi sanguigni. La catena dell'Imalaia permise per un tempo molto lungo di mantenere il gruppo B confinato a sud di essa, e i primitivi mongoloidi, che superando le barriere montane si erano diffusi verso il nord, verso l'Europa prima e più tardi verso la Lapponia, appartenevano ancora al gruppo O. Essi restarono per un certo tempo isolati ed immuni dalla intrusione e diffusione del sangue di gruppo B Si può ritenere come assodato che i primi incroci tra mongoloidi e caucasoidi in Europa e nell'Asia occidentale furono quelli di individui rispettivamente appartenenti ai gruppi O e *O e A* con scarsissima o addirittura nessuna frequenza di sangue mongoloide appartenente al gruppo B.

Se ci volgiamo all'evidenza preistorica noi sappiamo che il tipo alpino è molto antico in Europa. È ragionevole che questo tipo, i cui caratteri

stanno tra il caucasoide ed il mongoloide, sebbene al primo molto più vicino, dovesse essere il risultato di un tale originario incrocio: è così che potè risultare un tipo di gruppo sanguigno O o A, con una percentuale notevolmente bassa di B. Il tipo baltico orientale apparve in Europa più tardi dell'alpino (e ciò evidentemente per la sua localizzazione nell'occidente europeo), col quale alpino esso ha molti caratteri comuni pure essendo per particolari scheletrici, come ad esempio la forma degli zigomi e del naso, molto meno caucasoide di esso. Probabilmente risulta da una intrusione mongoloide ulteriore fra gli europei, con la conseguenza che il processo di ibridazione non andò così avanti come tra gli alpini. Una maggiore frequenza di caratteri mongoloidi è facile riscontrare fra di essi. La cosidetta razza sudetica e generalmente considerata un effetto di penetrazione ancora più tardiva di un popolo dai tratti mongoloidi nelle regioni nordiche alpine della Slesia, della Boemia, della Moravia, della Slovacchia e della Sassonia: come è da aspettarsi, queste popolazioni mostrano una più elevata percentuale di sangui appartenenti al gruppo B. Così pure la razza detta armenoide. che e un altro risultato dell' incrocio di mongoloidi con caucasoidi.

Prove evidenti finora non sufficientemente valutate sono fornite dagli italiani, cioè dalla storia razziale di quei mediterranei che abitano le regioni dell' Italia e dell'Africa settentrionale.

Abbiamo visto che i popoli negroidi, appartenenti principalmente al gruppo O, anticamente si fusero con i mongoloidi meridionali, di gruppo O e B, nelle originarie patrie tropicali di queste due specie.

Migrando e diffondendosi da qui, un popolo ibrido, dal quale, in virtù di una rigorosa selezione climatica, era derivata la massima parte degli elementi mongoloidi, portò con sè per il mondo il gruppo sanguigno B. Nella lontana preistoria europea, cioè nell'epoca paleolitica, già popoli negroidi si erano stabiliti in Italia, come si vede nelle grotte di Grimaldi presso il confine italo-francese. Nell' italiano moderno vi è ben poco che sia specificamente negroide. Possiamo ritenere che i caratteri negroidi, risultando disarmonici nel clima mediterraneo, sono in gran parte spariti.

Ma poichè ciò non influisce sui gruppi sanguigni, è proprio la sopravvivenza di una percentuale di gruppo B più elevata di quello che potrebbe altrimenti sospettarsi che ci fornisce ancora la traccia della loro anteriore esistenza. Ma un' altra origine forse più importante di questa relativa ai remoti negroidi, per l'alta percentuale di gruppo B in Italia, occorre tener presente. Gli scavi eseguiti in Sardegna ed in Sicilia hanno dimostrato la esistenza nell' entroterra di antichi brachicefali, che per altre evidenze archeologiche dobbiamo ritenere migrati dall' Egeo, da Creta, dall'Anatolia verso occidente, fino a raggiungere le terre dell'oceano atlantico e del mare del nord.

Evidenze, che giustificano il concetto che essi appartenessero al tipo

ibrido armenoide, intermedio fra il caucasoide ed il mongoloide; e poichè è elevata nei ceppi armenoidi la percentuale del gruppo B, abbiamo in ciò una importante ragione per l'attuale esistenza di numerosi sangui di gruppo B in Italia meridionale. Inoltre occorre tener presente che gli etruschi, i quali in varia guisa dimostravano forti connessioni anatoliche, cioe armenoidi, rappresentarono anche un notevole elemento fra i primi italiani della storia.

Bisogna anche ricordare le costanti infiltrazioni di levantini, di ebrei, di egizi, di negri; e particolarmente per la parte meridionale dell'Italia non si può sorvolare sulla importanza delle colonie albanesi di Sicilia, di Calabria e di Lucania, come influenza notevole per l'introduzione del gruppo B. Tutti questi movimenti razziali sopratutto nel meridione d'Italia sono effettivamente responsabili della sopravvivenza dei caratteri del sangue ancora oggi quando, probabilmente a causa delle condizioni climatiche, il carattere brachicefalico e evidentemente in declino. Oggi è certo molto più brachicefalo il nord che il sud dell'Italia. Ma questa brachicefalia è principalmente dovuta ad infiltrazione alpina, e gli alpini sono, come abbiamo detto, derivati dai mongoloidi di gruppo O e non dai mongoloidi di gruppo B. I brachicefali meridionali, invece, di origine prevalentemente armenoide, sono da considerarsi discendenti dai mongoloidi B piuttosto che da quelli di gruppo O.

È ora chiaro, per tutte queste considerazioni, che gli antichi caucasoidi, una volta forniti del solo gruppo O, ben presto subirono la mutazione che portò alla comparsa del tipo A, mutazione la cui frequenza logicamente si manifestò più cospicua in alcune derivazioni che in altre. Tra i rami col più elevato sviluppo di A vanno menzionati gli eschimoidi ed i mediterranei, mentre invece il nordico e forse pure il tipo atlantico debbono considerarsi appartenenti ai rami con bassa percentuale di gruppo A. Tuttavia, finchè non ci illuminino più particolareggiate indagini, noi non possiamo sapere a che cosa con esattezza debbano riferirsi le differenze nella percentuale di gruppo A in un ceppo con tanti differenti rami quale è la razza caucasica.

È perfino possibile che nella stessa razza in variabili proporzioni si sia verificata la mutazione del gruppo sanguigno. Perciò non è forse consigliabile lo spingere troppo oltre le deduzioni che possono trarsi dallo studio dei gruppi sanguigni.

Ciò che oggi sembra certo, poichè concorda con l'intera massa dei dati antropologici, è che tre grandi divisioni esistono del genere umano: la razza melanoide col gruppo O nel ramo australoide e i gruppi O e A nel negroide, la razza mongoloide col gruppo O nel nord e con i gruppi O e B nel sud e la razza caucasoide con i gruppi O ed A. Gli incroci di queste tre razze nelle differenti combinazioni hanno prodotto molti tipi, quali l'armenoide, il dinarico, l'alpino, il baltico orientale, per citare soltanto i gruppi europei

È per errore che tali gruppi furono considerati razze nel passato, poichè al massimo essi non sono che famiglie. Ed è alla luce di questa nuova dottrina che a me pare che i gruppi sanguigni possano fornire la chiave per la conoscenza degli incroci delle tre specie primordiali, e dare allo studioso un potente ausilio per le sue indagini sulle interrelazioni delle primitive razze dell'uomo.

Ci si propone adesso di studiare ed interpretare la distribuzione di questi tre ceppi: melanoide, mongoloide e caucasoide.

La teoria dei gruppi sanguigni, che abbiamo esposta, ci ha dato una chiara indicazione che vi sono tre tipi o specie nella matrice umana e che essi continueranno a fornire evidenze importanti quando si giunge a tutte le suddivisioni di ciascun ceppo primitivo ed ai suoi incroci. Ma, siccome i gruppi sanguigni sono soltanto una piccola, per quanto importante parte di tutti i dati a nostra disposizione, questa tesi poggerà non solo sulle loro interpretazioni ma anche sui fondamenti più ampi dell'antropologia. Abbiamo diviso la specie melanoide in due razze: la negroide e l'australoide.

La prima apparizione di quest'ultima razza in Europa fu probabilmente l'uomo di Neanderthal, e della prima i negroidi dell'epoca glaciale nelle grotte di Grimaldi. La razza negroide, che si trova comunemente in Africa, non è soltanto limitata a quel continente, nè è del tutto ivi dominante, come si è già visto nel discutere dei gruppi sanguigni. Nell'Africa settentrionale si fonde con la caucasoide e nell'Africa centrale e meridionale specialmente vi sono decise tendenze mongoloidi, o rivelate dai gruppi sanguigni o dalla larghezza del cranio, o da entrambi questi o da altri caratteri.

Il colore della pelle della razza negroide, quando è di puro sangue, è bruno assai scuro o cioccolata o quasi nero, mentre negli incroci il colore è più chiaro, a volte assumendo una tinta giallastra come in alcuni Boscimani. Il colore dei capelli è sempre nero ed essi sono generalmente corti. La struttura è crespa ed arricciata e con una sezione trasversale piatta vista al microscopio. A volte, come tra i Boscimani e gli Ottentotti, i capelli sono in ciuffi simulando zone di calvizie. Gli occhi sono generalmente grandi e neri. Tra i Boscimani e gli Ottentotti, come tra i Negritos africani, essi tendono ad essere piuttosto piccoli (A. H. Keane, *Man Past and Present*, 1900, pag. 83). Ciò significa, a parer mio, sull'evidenza dei gruppi sanguigni, che gli Ottentotti e i Boscimani hanno qualche ascendenza mongoloide; e verrà più tardi dimostrato che anche i Negritos hanno avuto incrocio con i Mongoloidi.

Perciò non è sorprendente il trovare in entrambe queste razze (Negritos e Boscimani-Ottentotti) simili formazioni di occhi.

Il cranio dei Negroidi è lungo (dolicocefalo), con un indice di circa 72. La mascella è prominente (prognata), e dove è altrimenti, è probabilmente dovuta ad altro sangue. Gli zigomi sono di rado prominenti, ma nel caso dei Negritos, dei Boscimani e degli Ottentotti essi sono assai prominenti:

«spesso così fortemente da formare una faccia triangolare con l'apice al mento» (A. H. KEANE, *Op. c.*, p. 83). Ciò non sorprende se, come si è suggerito, questi rami hanno sangue mongoloide.

Walter KOUSE ha mostrato che facce fortemente triangolari sono una caratteristica della Germania, ed osserviamo che esse si trovano più accentuate proprio in quelle parti dove il sangue nordico (caucasoide) è più debole, e dove il ramo dal cranio brachicefalo (mongoloide) è più forte. Questa forma di faccia, che si trova in alcuni individui, è il risultato delle combinazioni originate dalla faccia stretta e lunga del negroide con la faccia larga e pesante del mongoloide. Alla luce di questo è possibile che nei *genes* concorrenti a formare la faccia, quelli governanti gli zigomi tendono ad essere dominanti nel caso dei mongoloidi. Perciò quando noi troviamo lo sviluppo di zigomi alti e di facce triangolari tra i negri dovremo pensare ad una infiltrazione mongoloide come causa di ciò, specialmente nel caso dei Boscimani e degli Ottentotti, tra i quali abbiamo già trovato buone ragioni per sospettare una linea mongola da tempi antichissimi. Il naso è molto largo alla base, piccolo, piatto (platirrino) e spesso depresso alla radice. Tra alcuni dei Bantu esso giunge fino al leptorrino, ma questo è probabilmente dovuto all'influenza caucasoide. Le labbra dei Negri sono spesse e rovesciate. La statura non è costante. Così fra gli Ottentotti la media è di 5 piedi e 5 pollici (m. 1,65 circa) e fra i Boscimani va da circa 4 piedi e 8 pollici (m. 1,40 circa) a 5 piedi e 2 pollici (1,55 circa), mentre dall'altro canto tra i Bantu arriva da 5 piedi e 8 pollici (m. 1,70 circa) a 6 piedi (m. 1,80) e tra i Sudanesi è di 5 piedi e 10 pollici (m. 1,75 circa) - (A. H. KEANE, *Man Past and Present*, 1900, pp. 36-83). Nel caso degli Ottentotti e dei Boscimani l'elemento mongoloide può aver avuto una certa influenza per il fatto che essi sono generalmente di proporzioni inferiori alle normali. La statura è molto legata all'ambiente (poichè è facilmente arrestata dall'ambiente non propizio) e in qualche caso ciò vale anche per le variazioni di essa. È importante osservare, nel considerare la statura, le proporzioni del corpo. Le gambe dei Negri (specialmente nel caso delle tribù Niolitiche) sono esageratamente lunghe. Al contrario, troviamo tra i Mongoloidi, un'esagerata cortezza di gambe. Queste differenze strettamente razziali non sono ristrette soltanto a condizioni post-natali, perchè è possibile distinguere nell'embrione, dopo i primi tre mesi, il negro dall'europeo (Augusto STEFANELLI, *Biologia delle razze umane*, Bari 1942, pp. 133-34). In certi rami della razza negroide vi è una condizione peculiare chiamata steatopigia: si trova principalmente tra gli Ottentotti e i Boscimani, la quale consiste nel gonfiore delle natiche delle donne. È una formazione del tutto estranea ai ceppi caucasoide e mongoloide e serve solo a distinguere queste razze dalle altre. La steatopigia è considerata dagli Ottentotti un segno di bellezza piuttosto che una deformazione. È possibile che le condizioni steatopigie delle sta-

tuette femminili trovate nei tempi Aurignaciani nell'Europa preistorica indichi una estensione settentrionale di influenza negroide, specialmente in considerazione del fatto che tipi di scheletro negroide sono stati trovati a Grimaldi in Italia. Bisognerebbe indicare, in aggiunta di ciò, che vi sono considerevoli differenze fra gli organi genitali dei Negroidi e quelli degli individui appartenenti agli altri due ceppi, e che, nel complesso, i Negroidi sono più vicini ai Simiani.

Ecco quindi la specie melanoide o razza primitiva della umanità stabilita in tutte le regioni tropicali del mondo, un tempo diffusa, persino in Europa nei tempi Neanderthal (Australoide) e Aurignaciani (Negroide) in epoca paleolitica.

Essa si distingue nettamente per i caratteri cui abbiamo accennato (la maggior parte dei quali sono più vicini a quelli dei Simiani che a quelli del Caucasoidi). Come si è visto, appartiene ai gruppi sanguigni O e A. Dove si presentano brachicefalia, forma mongoloide degli occhi, viso triangolare, zigomi sporgenti o gruppo sanguigno B, ciò è dovuto alla infiltrazione, in tempi antichissimi, di sangue mongoloide nella razza originaria melanoide.

Il tipo misto originato dall'incrocio di questa specie con le razze mongoloidi e caucasoidi, deve essere ora brevemente menzionato, sebbene la mancanza di spazio non ci consenta di addentrarci in descrizioni dettagliate.

Tra le più antiche famiglie melanoidi con infiltrazioni mongoloidi, come si è già detto, vi sono i Boscimani e gli Ottentotti. A prescindere dalle ragioni già esposte nel descrivere i gruppi sanguigni, per indicare i tipi ibridi in queste famiglie, si possono ripetere i seguenti fatti. La tendenza ad un colorito più chiaro o gialliccio, la piccolezza e la piega dell'occhio, gli zigomi sporgenti, il viso triangolare e la statura bassa: tutti questi caratteri sono, a parer mio, dovuti interamente o in parte all'infiltrazione di sangue mongoloide. Inoltre la presenza di capelli in ciuffi frammisti con zone di calvizie può essere il risultato di speciali condizioni dello stesso incrocio.

Nel caso del Negrito africano si presentano praticamente gli stessi caratteri, e oltre ad essi, il che è molto importante, la brachicefalia. Quest'ultimo carattere non lascia dubbio alcuno sulla presenza dell'elemento mongoloide nella razza. Il Negrito oceanico presenta spesso i medesimi caratteri e ciò è dovuto allo stesso tipo di incrocio che si può essere verificato nei tropici orientali indipendentemente da quello dell'Africa.

In Oceania noi troviamo tra i Melanesiani e gli altri, capelli lunghi folti e «simili a scope». Ciò è dovuto indubbiamente all'elemento australoide piuttosto che a quello negroide che è la principale famiglia melanoide nel ceppo. Perchè dovremmo ricordare, che a differenza del negroide l'uomo australoide è una creatura pelosa, con capelli ondulati o lisci e con peli abbondanti sul viso e sul petto.

Nei Papuasi, in particolare, il naso tende ad essere aquilino invece che piatto e largo come nei tipi australoidi o negroidi. Questi caratteri, congiunti al cranio alto e alla tendenza ad un leggero prognatismo delle mascelle, indicherebbero un elemento di sangue caucasoide, oltre quegli elementi mongoloidi che, come abbiamo già visto, sembrano essersi liberamente mescolati con alcuni dei rami melanoidi fin dai tempi più antichi.

Generalmente si è ritenuto che gli Ainu del Giappone sono in parte di origine caucasoide, specialmente riguardo alla loro grande pesantezza. Questa teoria, però, presenta diverse grandi difficoltà, ed è molto più facile interpretare il fatto che la pesantezza, la sezione trasversale ovale dei capelli, come anche le grandi creste sopraorbitali, e numerosi altri caratteri, sono dovuti piuttosto alla fonte australoide che alla caucasica; mentre la brachicefalia, la statura bassa e la chiarezza della pelle sono mongoloidi. Che la pelle vada verso il colore molto oscuro in diversi casi indica per gli Ainu un'origine melanoide piuttosto che caucasoide. La rassomiglianza, quindi, al tipo brachicefalo dell'Europa orientale è superficiale.

(La conclusione a cui arriva Roland Dixon - *The Racial History of Man*, New York, 1923, pp. 289-90, che gli Ainu rappresentino i sopravviventi di una popolazione preistorica dell'Asia orientale, di origine proto-negroide o proto-australoide, è indubbiamente corretta). La qualità dei gruppi sanguigni appoggia questo assunto di una origine di una razza di forte gruppo A, come l'australoide, incrociata con quella di forte gruppo B, quale la mongoloide.

I Mongoloidi, che sono con i Melanoidi, gli antenati, in differenti gradi e sotto differenti circostanze, di tutte quelle razze miste come i Negritos, Boscimani, Ottentotti, Ainu ed altri, sono di tipo assai distinto. Il loro cranio è largo, la faccia corta e rotonda, la statura bassa, con le gambe, come nel caso dei Giapponesi, straordinariamente corte. I loro capelli sono neri, lisci, e di sezione trasversale rotonda. Vi è una decisa scarsezza di barba. Il colore della pelle è usualmente un bruno gialliccio sporco. I loro zigomi sono alti e sporgenti. Il naso è piccolo, concavo e con ampie narici. I loro occhi sono piccoli ed obliqui, con una piega verticale sul canto, interno, le labbra sono sottili ed a volte leggermente sporgenti.

Proprio come lungo i loro confini meridionali sono avvenute parecchie mescolanze con i Melanoidi, così anche lungo i loro confini occidentali se ne sono avute con i bianchi caucasoidi. Di conseguenza, come passiamo dal cuore dell'Asia verso occidente, la statura progressivamente si eleva la lunghezza della faccia e del cranio cresce, i capelli divengono meno diritti e lisci e meno neri, e la pelle si schiarisce di colore. Qui dunque noi abbiamo un completo appoggio per la attendibilità della mia interpretazione sull'evidenza fornita dai gruppi sanguigni, cioè che le famiglie brachicefale dell'Europa orientale, non sono razze distinte, da essere

chiamate Baltica orientale. Alpina, Sudetica, Armenoide e Dinarica, ad incroci di diverse varietà tra l'uomo caucasoide ed il mongoloide.

Nel sud la specie caucasoide (che in Europa è rappresentata per noi solo dalle razze Nordica, Atlantica e Mediterranea) è mescolata con i melanoidi. Qui, come risultato, noi abbiamo i ceppi così detti Simiano, Coptico, Camitico ed Etiopico: razze principalmente bianche con sangue melanoide; mentre più oltre verso sud il sangue caucasico sprizza su regioni prevalentemente negroidi.

In India abbiamo lo stesso fenomeno, con l'aggiunta di una vena mongoloide come nei Bengala. Questa influenza caucasoide si diffonde verso sud-est influenzando anche i Papuasi, i quali nel loro naso aquilino rivelano un elemento di origine caucasica. Il sangue caucasoide è anche diffuso con vari elementi attraverso molte parti delle aree mongoloidi del mondo: si trova distintamente in molte parti della Cina e tra i mongoli settentrionali, ma sempre come un elemento minore nel tutto.

L'Americano autoctono non rappresenta una razza umana nuova ed indipendente, ma è composta di queste tre razze o specie basilari. L'antico Eschimese, il Patagone ed altri elementi staccati rappresentano un'antica vena di sangue caucasoide, derivato dal vecchio tipo paleolitico di Chancelade, mentre il tipo dominante brachicefalo è mongoloide — però un Mongoloide molto primitivo e non sviluppato: mentre, infine, qua e là vi sono elementi di sangue australoide e negroide scorrenti attraverso la nativa matrice razziale americana.

Solo una interpretazione come questa può coesistere col metodo ortodosso antropologico e con i più recenti risultati, forniti dai gruppi sanguigni che indicano chiaramente una tale triplice origine per i vari gruppi dell'uomo vivente.

Lo scritto di Kant su La fine di tutte le cose

Nota del socio **Giuseppe De Lorenzo**

(Adunanza del dì 4 Aprile 1944)

Sunto. — In questa Nota viene tradotto, commentato ed annotato brevemente lo scritto di Emmanuele Kant *Das Ende aller Dinge*, nel quale sono concisamente ed implicitamente contenute le ultime conclusioni della sua filosofia teoretica e pratica e della loro applicazione alla vita.

Nel cataclisma della guerra, che ha attualmente travolto quasi tutti i popoli della terra, che ha così duramente sconvolto le genti e le sedi millenarie della nostra Italia e ha più specialmente colpito la nostra Società Reale, che ne ha avuto la sua sede e la sua biblioteca incendiate e distrutte, mi permetto, per nostra edificazione, di presentare all'Accademia un breve lavoro di Emmanuele Kant su *La fine di tutte le cose;* da lui composto nella piena maturità del suo spirito, quando aveva proprio allora compiuto settanta anni, nel quale sono concisamente ed implicitamente contenute le ultime conclusioni di tutta la sua filosofia teoretica e pratica e della loro applicazione alla vita.

Il lavoro, *Das Ende aller Dinge*, apparve nel fascicolo di giugno del 1794 della *Berlinische Monatschrift*, nella quale Kant aveva già pubblicato altri suoi lavori: come quello, per esempio, *Sui vulcani nella Luna*, del marzo 1785, che ancor oggi si può leggere da noi col più grande interesse. Di eguale interesse è l'altro suo saggio, *Qualche cosa sopra l'influsso della Luna sul tempo*, apparso nel fascicolo di maggio 1794 della stessa rivista e preannunziato da Kant al direttore Biester con una lettera del 10 aprile 1794, nella quale scriveva, che gli avrebbe mandato: « qualche cosa, che, come il *Tale of a Tub* di Swift, possa produrre una diversione momentanea al continuo chiasso sopra una cosa di tal genere. » Nella stessa lettera preannunziava un altro contributo alla rivista: « Il saggio, che le manderò prossimamente, avrà per titolo *Das Ende aller Dinge*, che sarà da leggersi parte piangendo parte ridendo. » Noto qui, incidentalmente, che questa espressione di Kant, *theils kläglich theils lustig*, riproduce inconsapevolmente quella usata da Giordano Bruno, *in tristitia hilaris in hilaritate tristis*, quando nel propologo al *Candelaio* scrive, che nel contemplare le azioni ed i discorsi umani col senso di Eraclito o di Democrito si ha occasione di molto o piangere o ridere. Già il 18 maggio

KANT mandò il saggio preannunziato, che uscì poi, come s'è detto, nel fascicolo di giugno della rivista. Il saggio *Das Ende aller Dinge* fu poi pubblicato a parte nel 1795 a Frankfurt e Leipzig in *Zwo Abhandlungen über moralische und politische Gegenstände*, e da allora ripubblicato di continuo in tutte le stampe e ristampe delle opere, parziali o complete, di KANT, fino ad essere contenuto nel volume ottavo, Berlin, G. Reimer, 1912, dell'edizione monumentale delle KANT's *gesammelte Schriften, herausgegeben von der Preussischen Akademie der Wissenschaften.*

Non ne esistono, ch'io sappia, edizioni italiane, tranne due frammenti pubblicati nel 1925 da PIERO MARTINETTI nella sua *Antologia kantiana*. Eccone, quindi, ora la traduzione integrale.

La fine di tutte le cose

È un'espressione usuale, specialmente nel pio linguaggio, quella di far dire ad un morente: passa dal tempo nell'eternità.

Questa espressione in realtà non direbbe nulla, se con eternità si dovesse intendere un tempo procedente all'infinito: perchè allora l'uomo non uscirebbe mai dal tempo, ma passerebbe solo sempre dall'uno nell'altro. Si deve quindi con ciò pensare una fine di tutto il tempo con una continuazione ininterrotta dell'uomo; questa continuità però anche (considerando la sua esistenza come grandezza, quale grandezza incomparabile *(duratio noumenon)* col tempo, della quale noi certo non possiamo farci alcun concetto (come semplicemente negativo). Questo pensiero ha qualche cosa di inorridente in se: perchè porta quasi all'orlo di un abisso, dal quale, per chi vi cade, non è possibile alcun ritorno ("Lui ritiene fermo in sede severa, che non concede ritorno, l'eternità con forti braccia„ HALLER); ma ha anche qualche cosa di attraente, perchè non si può desistere, di rivolgervi sempre di nuovo il proprio occhio, che ne rifugge spaventato *(nequeunt expleri corda tuendo*, VIRGILIO). È un pensiero terribilmente sublime: in parte per la sua oscurità, in cui la forza d'immaginazione agisce più potentemente che alla chiara luce. Infine esso deve però essere anche intessuto in modo mirabile con la generale ragione umana: perchè, ammantato in una od in un'altra guisa, esso si ritrova tra tutti i popoli raziocinanti, in tutti i tempi. — Seguendo noi ora il passaggio dal tempo nell'eternità (questa idea, considerata teoreticamente, come ampliamento della conoscenza, può avere o no realtà obiettiva), urtiamo contro la fine di tutte le cose quali esseri temporali e quali oggetti di possibile esperienza: la quale fine però è contemporaneamente, nell'ordine morale dei fini, il principio di una continuità proprio di questi esseri come transcendenti, quindi non soggetti alle condizioni del tempo; la quale continuità quindi ed il suo stato non può esser capace di altra determinazione che di quella morale della loro costituzione.

I giorni sono quasi figli del tempo, perchè il giorno seguente, con quello che contiene, è il prodotto del precedente. Come ora l'ultimo figlio dei suoi genitori viene chiamato il figlio più giovane: così la nostra lingua tedesca ha voluto chiamare l'ultimo giorno (il punto del tempo, che pone termine a tutto il tempo) il giorno più giovane (*jungsten Tag*). L'ultimo giorno appartiene dunque ancora al tempo, perchè in esso avviene ancora qualche cosa (non pertinente all'eternità, perchè ciò sarebbe continuazione del tempo): ossia la resa dei conti, per gli uomini, della loro condotta durante tutta la loro vita. È un giorno di giudizio; il giudizio di assoluzione o di condanna del Giudice del mondo è quindi propriamente la fine di tutte le cose nel tempo e, contemporaneamente, il principio dell'eternità felice od infelice), nella quale la sorte toccata a ciascuno rimane così, come gli fu assegnata al momento della sentenza. Così l'ultimo giorno contiene al tempo stesso in sè anche l'ultimo giudizio, o giudizio finale. — Se ora tra le cose finali dovesse annoverarsi anche la fine del mondo come esso ci appare nella sua figura attuale, ossia il cadere delle stelle dal cielo come da una volta, il crollo di questo stesso cielo (o lo svanire di esso, come di un libro avvolto), la combustione loro, la creazione di un nuovo cielo e di una nuova terra per sede dei beati, e dell'inferno per i dannati: allora quel giorno del giudizio non sarebbe certo l'ultimo giorno: ma diversi altri ancora lo seguirebbero. Solamente, siccome l'idea di una fine di tutte le cose deriva la sua origine dal raziocinare non sul corso fisico, ma sul corso morale delle cose nel mondo, e solo da ciò è determinata; e quest'ultimo solo può essere riferito al trascendente (che solo nel morale è intelligibile), qual'è l'eternità: allora la rappresentazione di quelle ultime cose, che debbono venire dopo l'ultimo giorno, deve essere ritenuta solo come una figurazione sensibile di esso, insieme con le sue conseguenze morali, che non sono, del resto, per noi teoreticamente comprensibili.

Vi è però da osservare, che fin dai tempi più antichi vi sono stati due sistemi concernenti la futura eternità: uno, quello degli *unitari* di essa, i quali concedono la beatitudine eterna a tutti gli uomini (purificati da più o meno lunghe penitenze); l'altro, quello dei *dualisti* [1]), che danno ad alcuni eletti la beatitudine, a tutti gli altri invece l'eterna

[1]) Un tale sistema nell'antica religione persiana (di Zoroastro) era fondato nella presupposizione di due esseri originari in eterno conflitto l'uno contro l'altro: il principio buono, *Ormuz*, ed il cattivo, *Ariman*. — È strano, che la lingua di due paesi lontani l'uno dall'altro, ma ancor più lontani dall'attuale sede della lingua tedesca, nella denominazione di questi due esseri originari sia tedesca. Ricordo di aver letto in Sonnerat, che in *Ava* (la terra dei barmani) il principio buono è chiamato *Godeman* (la quale parola pare che si trovi anche nel nome

dannazione. Poichè un sistema, in cui tutti fossero destinati ad essere dannati, non potrebbe aver luogo, non essendovi alcuna giustificazione, perche essi siano stati soprattutto creati; e d'altra parte l'annientamento di tutti denunzierebbe il fallimento di una sapienza, che, scontenta della propria opera, non sa trovare altro mezzo, per rimediare alle mancanze di essa, che quello di distruggerla. — Ai dualisti intanto si oppone la stessa difficoltà, che vieta di immaginare un'eterna dannazione di tutti: perche si potrebbe chiedere, a quale scopo sono stati creati anche pochi, a quale scopo anche un solo, se dovesse esistere solo, per essere poi eternamente condannato? il che certo sarebbe assai peggio che il non essere.

Invero, per quanto noi possiamo comprendere, per quanto possiamo esaminare noi stessi, il sistema dualista (solo però sotto un essere originario sommamente buono) ha in sè una ragione prevalente, per il fine pratico di ogni uomo, in quanto egli debba giudicare sè stesso (ma non in quanto debba giudicare gli altri): giacchè, per quanto ci si conosce, la ragione non gli lascia per l'eternità altro prospetto, che quello, che dalla sua passata condotta gli schiude alla fine della vita la sua coscienza. Ma, per farne un dogma, cioè un principio teoretico in sè stesso (obiettivamente) valido, per questo esso è, come un semplice giudizio della ragione, assolutamente insufficiente. Perchè quale uomo conosce sè stesso, quale conosce gli altri così da cima a fondo, per decidere: se egli sottraesse dalle cause della sua presunta buona condotta tutto quello, che si chiama merito della fortuna, come il suo innato buon temperamento, la naturale forza maggiore delle sue capacità superiori (dell'intelligenza e della ragione, per domare i propri appetiti), inoltre l'occasione, per cui il caso felicemente gli risparmiò molte tentazioni, che colpirono un altro; se egli togliesse tutto ciò dal suo effettivo carattere (come deve necessariamente sottrarnelo, per poterlo convenientemente valutare, perchè come dono di fortuna non può attribuirlo a proprio merito); chi allora vuol decidere, dico io, innanzi all'occhio onniveggente di un sommo giudice, se un uomo per il suo interno valore morale abbia in tutto e per tutto una preferenza rispetto ad un altro, e non possa invece essere una sciocca presunzione, con questa superficiale conoscenza di sè stesso, il voler dare a proprio vantaggio un giudizio sul valore morale (ed il meritato destino) di sè stesso e degli altri? — Dunque sia il sistema dell'*unitario* che quello del *dualista*, entrambi considerati come dogma,

Darius *Codomanus*; e siccome la parola *Ahriman* suona assai simile ad *arge Mann*, pare che l'odierno persiano contenga una quantità di parole originariamente tedesche: sì che può essere un compito per gli antiquari, il ricercare l'origine degli attuali concetti religiosi di molti popoli anche con la guida della parentela linguistica (si veda il viaggio di SONNERAT, 4 libro, 2 cap., 2 vol.).

sembrano transcendere assolutamente il potere speculativo della ragione umana: e tutto sembra ricondurci, a limitare quelle idee della ragione semplicemente alle condizioni dell'uso pratico. Poichè noi non vediamo innanzi a noi nulla, che ci possa già ora istruire sul nostro destino in un mondo futuro, altro che il giudizio della nostra propria coscienza, ossia quel che il nostro presente stato morale, per quanto noi lo possiamo conoscere, ragionevolmente ce ne fa giudicare: che cioè, quali principii della nostra condotta noi abbiamo trovati dominanti in noi fino alla fine (siano essi del bene o del male), debbano continuare anche dopo la morte; senza che noi abbiamo la minima ragione, di presumere un loro mutamento in quel futuro. Quindi noi dovremmo aspettarci anche per l'eternità le conseguenze commisurate a quel merito od a quella colpa, sotto il dominio del buono o del cattivo principio; nel quale rispetto quindi è saggio, di agire così, come se un'altra vita e lo stato morale, con cui ora finiamo la presente, insieme con le loro conseguenze, con l'entrare in essa siano immutabili. Per lo scopo pratico quindi dovrà accettarsi il sistema dualista, senza però voler stabilire quale dei due si meriti la preferenza sotto l'aspetto teoretico e puramente speculativo: tanto più che l'unitario sembra cullarsi troppo in indifferente sicurezza.

Ma perchè, dopo tutto, gli uomini aspettano una fine del mondo? e, se questa viene anche loro concessa, perchè proprio una fine con terrore (per la maggior parte del genere umano)?... Il motivo della prima istanza sembra risiedere in ciò, che la ragione dice loro, che la durata del mondo ha un valore solo in quanto gli esseri ragionevoli in esso sono conformi allo scopo finale della sua esistenza; ma se questo non dovesse essere raggiunto, la creazione stessa apparirebbe ad essi senza scopo: come uno spettacolo, che non ha alcun esito e che non fa conoscere alcuna ragionevole intenzione. La seconda è fondata sull'opinione della perversa costituzione del genere umano [1]), che è grande fino alla disperazione; metter

---

[1]) In ogni tempo, presunti sapienti (o filosofi), senza degnare della menoma attenzione la disposizione al bene nella natura umana, si sono sfogati in paragoni ripugnanti, a volte nauseanti, per rappresentare come assai spregevole il nostro mondo terreno, la sede degli uomini: 1) quale una *locanda* (caravanserraglio), come la vede quel derviscio, che nel suo viaggio terreno dov'essere sempre pronto a cedere il posto ad un successore; 2) quale un *penitenziario*, come lo considerano i sapienti brahmanici, tibetani ed altri dell'Oriente (e perfino Platone), un luogo di penitenza e di purificazione per esseri caduti o scacciati dal cielo, divenuti anime di uomini e di animali: 3) quale un *manicomio*, dove non solo ciascuno per sè annienta i suoi propri intenti, ma ognuno fa all'altro ogni possibile male e per giunta reputa massimo onore l'abilità e la capacità di far ciò: 4) infine una *cloaca*, in cui si è rovesciata tutta la sporcizia di altri mondi. Quest'ultima

fine alla quale, ed invero una terribile fine, è (secondo la maggior parte degli uomini) l'unica misura degna della somma sapienza e giustizia. — Perciò anche i preannunzi del giorno del giudizio (e come mancherebbero segni e miracoli ad una forza d'immaginazione eccitata da grandi aspettative?) sono tutti di genere spaventoso. Alcuni li vedono nel prevalere dell'ingiustizia, nell'oppressione dei poveri con lo sfrenato godimento dei ricchi e nella generale perdita della lealtà e della fede; o nelle guerre sanguinose divampanti in tutti gli estremi della terra, e così via: in una parola, nella degenerazione morale e nel rapido accrescimento di tutti i vizi, insieme con i mali che li accompagnano; tali vizi, essi vaneggiano, quali mai si videro nel passato. Altri invece vedono quei segni in straordinari fenomeni naturali, in terremoti, tempeste, inondazioni, comete e meteore.

Sta di fatto, che gli uomini sentono non senza ragione il peso dell'esistenza, quantunque essi stessi ne siano la causa. Il motivo di ciò mi pare che stia in questo. — Naturalmente nei progressi del genere umano la cultura dei talenti, dell'abilità e del gusto (con la loro conseguenza l'abbondanza), precede lo sviluppo della moralità; e questo stato di cose è proprio il più gravoso e pericoloso, sia pel bene fisico che pel morale: perchè i bisogni crescono molto più fortemente dei mezzi per appagarli. Ma la disposizione morale umana, la quale (come la *poena pede claudo* di ORAZIO) va sempre zoppicando dietro all'umanità, finisce una buona volta (come c'è bene da sperare sotto un savio reggitore del mondo) col sorpassarla; giacchè essa umanità nel suo corso frettoloso da sè stessa s'imbroglia ed inciampa; e così, anche per la stessa esperienza del privilegio della moralità nella nostra epoca in paragone con tutte le precedenti, si dovrebbe forse poter nutrire la speranza, che il dì finale sopravvenga piuttosto come un'ascensione di ELIA che come una caduta nell'inferno, simile a quella della banda di KORAH, che possa portare alla fine di tutte le cose sulla terra. Solo, che questa fede eroica nella virtù non sembra avere subiettivamente sugli animi, per la conversione, un influsso così

trovata è in certo modo originale e dovuta ad un arguto persiano, che pose in cielo il paradiso, la sede della prima coppia umana, nel cui giardino erano molti alberi, ricchi di magnifici frutti, il cui residuo, dopo la loro digestione, si perdeva per impercettibile evaporazione; tranne un unico albero, nel centro del giardino, che era molto attraente, ma portava un frutto, che non si faceva traspirare. Siccome i nostri progenitori si indussero, malgrado il divieto, a mangiarne: allora, perchè essi non sporcassero il cielo, non ci fu altro mezzo, che far loro indicare da un angelo la terra lontana con le parole: "Quella è la latrina di tutto l'universo,,; e farli ivi accompagnare da lui, che se ne rivolò in cielo, dopo averli lasciati laggiù a fare i loro bisogni. Da ciò ha avuto origine il genere umano sulla terra.

generalmente forte, come la credenza in una scena piena di spaventi, che si immagina precedere le ultime cose.

Siccome noi qui abbiamo da fare (o da giocare) solamente con idee, che la ragione si crea da se stessa, di cui gli oggetti (se ne hanno) trascendono il nostro cerchio visivo; che però, sebbene oltrepassino la conoscenza speculativa, non perciò sono da ritenersi sotto ogni aspetto vuote, ma ci vengono date dalla stessa regolatrice ragione, non già per sottilizzare sui loro oggetti, quel che essi sono in sè e nella loro natura, ma per come abbiamo da pensarle in ausilio dei principii morali, diretti verso lo scopo finale di tutte le cose (per cui esse, che altrimenti sarebbero del tutto vuote, ottengono realtà pratica obiettiva): — allora noi abbiamo innanzi a noi un campo libero, questo prodotto della nostra propria ragione, cioè il concetto generale della fine di tutte le cose, per ripartirlo e classificarlo secondo il rapporto, che esso ha con il nostro potere di conoscenza.

Secondo ciò, il tutto viene diviso e presentato in tre ripartizioni: 1) nella fine *naturale* [1]) di tutte le cose secondo l'ordinamento di scopi morali della sapienza divina, che noi quindi (a scopo pratico) possiamo ben comprendere; 2) nella fine *mistica* (soprannaturale) delle cose nell'ordine delle cause efficienti, delle quali noi nulla comprendiamo; 3) nella fine *contronaturale* (perversa) di tutte le cose, che viene prodotta da noi stessi perciò, che ne fraintendiamo lo scopo finale. Di queste tre divisioni la prima è stata appunto ora già trattata: seguono ora le altre due.

Nell'*Apocalisse* (X, 5, 6) «l'angelo levò la mano destra al cielo e giurò, per colui che vive di eternità in eternità, che ha creato il cielo, la terra e il mare e le cose che sono in essi, *che non vi sarebbe più tempo.*»

Se non si assume, che quest'angelo «con la voce di sette tuoni» abbia voluto urlare cose insensate, egli deve aver voluto dire, che non vi sarà più alcun *mutamento;* perchè se nel mondo vi fosse ancora mutamento, allora vi sarebbe anche il tempo, perchè quello può aver luogo solo in questo e non si può pensare senza il presupposto di esso.

Qui ora dunque viene rappresentato come oggetto dei sensi una fine di tutte le cose, di cui non possiamo farci alcun concetto: perchè ci impigliamo noi stessi inevitabilmente in contraddizioni, quando vogliamo fare un solo passo dal mondo dei sensi in quello intelligibile; il che avviene qui perciò, che il momento, il quale termina la fine del primo, deve essere anche il principio dell'altro; per cui questo viene messo con quello in una stessa serie di tempo, il che è contradittorio.

[1]) *Naturale* (formaliter) si chiama ciò che avviene necessariamente secondo le leggi di un certo ordine, quale esso anche sia, anche morale (quindi non sempre solamente fisico). Contrario ad esso è l' *innaturale,* che può essere il soprannaturale od il contronaturale. Il necessario per cause naturali sarebbe anche rappresentato come materialmente-naturale (fisicamente-necessario).

Ma noi diciamo anche, che pensiamo una durata come *infinita* (come eternità), non perchè forse abbiamo un qualunque concetto determinabile della sua grandezza — essendo ciò impossibile, perchè le manca interamente il tempo come sua misura —; ma, siccome dove non vi è alcun tempo, non vi è anche alcuna fine, quello è un semplice concetto negativo della durata eterna, per cui non facciamo un passo innanzi nella nostra conoscenza, ma vogliamo solo dire, che sulla via dei continui mutamenti non si può mai dare soddisfazione abbastanza alla ragione rivolta (praticamente) verso lo scopo finale: sebbene anche, se pure essa provi col principio dell'arresto e della immutabilità degli esseri dell'universo, parimenti non potrebbe essere soddisfatta per rispetto al suo uso teoretico, che anzi si perderebbe in una completa mancanza di pensiero; ed allora non le resta altro che pensare un mutamento procedente all'infinito (nel tempo) in continuo progresso verso lo scopo finale; nel quale procedere il *carattere* (che non è un fenomeno, ma alcunchè di soprasensibile, quindi non mutabile nel tempo) rimane ed è persistentemente lo stesso. La regola, quindi, dell'uso pratico della ragione conformemente a questa idea non vuol dire altro che questo: noi dobbiamo prendere questa massima così, come se, con tutti i mutamenti all'infinito dal bene al meglio, il nostro stato morale secondo il carattere (lo *homo noumenon*, «il cui mutamento è in cielo») non sia soggetto ad alcun mutamento nel tempo.

Che però sopravvenga una volta un punto del tempo, in cui ogni mutamento (e con esso il tempo stesso) venga a cessare, è una rappresentazione, contro cui si ribella la forza dell'immaginazione. Vale a dire che allora l'intera natura diviene rigida e quasi pietrificata: l'ultimo pensiero, l'ultimo sentimento restano allora nel soggetto pensante sempre gli stessi, stabili e senza mutamento. Per un essere, che solo nel tempo può essere consapevole della propria esistenza e della sua grandezza (come durata), una tale vita, se altrimenti vita può chiamarsi, deve apparire eguale all'annientamento: perchè, per immaginarsi in un tale stato, si deve pur pensare qualche cosa; ma il pensare contiene un riflettere, che può avvenire solo nel tempo. — Gli abitanti dell'altro mondo vengono perciò rappresentati, secondo la differenza del loro luogo d'abitazione (il cielo o l'inferno), come intonanti o sempre la stessa canzone, il loro Alleluja, od eternamente appunto gli stessi lamenti (XIX, 1-6; XX, 15): con che deve essere indicata l'assoluta mancanza di ogni mutamento nel loro stato.

Ciò nonpertanto questa idea, per quanto essa transcenda la nostra forza di comprensione, è però in senso pratico assai vicina alla nostra ragione. Se noi assumiamo lo stato fisico-morale dell'uomo qui in vita anche nel modo migliore, quello cioè di un continuo progresso ed accostamento al sommo bene; allora egli però (anche nella consapevolezza dell'immutabilità del proprio carattere) non può essere contento della pro-

spettiva di una continua mutazione del suo stato (del fisico come del morale). Perchè lo stato, in cui egli ora si trova, rimane sempre un male in confronto del migliore, nel quale è in procinto di entrare; e la rappresentazione di un infinito progresso verso lo scopo finale, è pur contemporaneamente un prospetto in una infinita serie di mali, che, sebbene invero siano superati dal maggiore bene, non lasciano posto alla contentezza, che egli può pensare solo in quanto lo scopo finale venga una volta finalmente raggiunto.

Con ciò l'uomo sottilizzante va a finire nella *mistica* (perchè la ragione, siccome non si appaga facilmente del suo uso immanente, cioè pratico, anzi si arrischia volentieri nel transcendente, ha anche i suoi misteri), nella quale la sua ragione non comprende sè stessa e quel che essa vuole, ma preferisce andarsene in estasi, anzi che, come converrebbe ad un abitante del mondo dei sensi, tenersi nei limiti di questo. Da ciò sorge il mostro del sistema di Laokiun, del *sommo bene*, che deve consistere nel *nulla:* ossia nella conscienza, di sentirsi ingoiato nell'abisso della divinità col transfondersi in essa e quindi con l'annullamento della propria personalità: per presentire il quale stato, filosofi cinesi si sforzano, ad occhi chiusi in camere oscure, di pensare e di sentire questo loro Nulla. Da ciò il *panteismo* (dei tibetani e di altri popoli orientali) e lo *spinozismo,* prodotto poi dalla sua sublimazione metafisica: i quali due sono strettamente congiunti con l'antichissimo sistema dell'*emanazione* di tutte le anime umane dalla divinità (e del loro finale riassorbimento in essa). Tutto questo solo perchè gli uomini possano infine rallegrarsi di una *eterna pace,* che costituisce la loro supposta beata fine di tutte le cose: propriamente un concetto, col quale in essi ad un tempo l'intelligenza si spegne e tutto lo stesso pensare ha una fine.

La fine di tutte le cose, che vanno per le mani degli uomini, anche nei loro buoni fini è *follia*: ossia, uso per i loro fini di tali mezzi, che sono a quelli proprio contrari. *Sapienza*, ossia ragione pratica nella commisurazione delle loro regole corrispondenti allo scopo finale di tutte le cose, il sommo bene, sta solo in Dio: e non agire palesamente contro la loro idea è solo quel che si potrebbe chiamare umana sapienza. Questa sicurezza, però, contro la follia, che l'uomo può sperar di raggiungere solo con tentativi e piani sempre mutevoli, è più «un gioiello, che anche l'uomo migliore può solo inseguire, se anche voglia afferrarlo»; pel quale però egli non deve mai farsi prendere dalla egoistica persuasione, e tanto meno agire secondo essa, di averlo afferrato. — Da ciò anche di tempo in tempo i mutevoli e spesso contrastanti progetti di mezzi adatti, per stabilire in tutto un popolo la religione con purezza ed al tempo stesso con forza; così che si può bene esclamare: Poveri mortali, in voi nulla è costante, altro che l'incostanza!

Se frattanto con questi tentativi infine si è proceduto fino al punto,

che la comunità sia disposta e capace, di dare ascolto, non solo alle pie dottrine tramandate, ma anche alla ragione pratica da esse illuminata (come per una religione è anche assolutamente necessario); se i savii (secondo umana natura) tra il popolo non fanno patti tra di loro (come un clero), ma si accordano in maggioranza quali concittadini su progetti, i quali dimostrino in modo insospettabile, che ad essi sta a cuore la verità: e se anche il popolo nel complesso (se pur non ancora nel più piccolo dettaglio) vi prende interesse col bisogno generalmente sentito, non fondato sull'autorità, della necessaria edificazione della propria disposizione morale: allora nulla pare più consigliabile, che lasciare quelli a continuare a fare e proseguire il loro cammino, giacchè essi sono sulla buona via, per quanto riguarda l'idea che seguono; per quel che però riguarda il successo dei mezzi scelti per raggiungere il migliore scopo finale, siccome esso è sempre incerto, secondo il corso della natura, sarà meglio affidarlo alla provvidenza. Poichè, si possa essere miscredenti quanto si voglia, pure, quando è assolutamente impossibile, di poter prevedere con sicurezza il successo di certi mezzi presi secondo ogni sapienza umana (che, se vuol meritare il suo nome, deve essere diretta solo verso la morale), si deve credere praticamente ad un concorso di sapienza divina nell'andamento della natura, se non si vuole completamente rinunziare all'ultimo fine. — Invero si obietterà: È stato già detto spesso, che il piano attuale è il migliore; si deve restare da ora per sempre in esso, che è uno stato per l'eternità. «Chi (secondo questo concetto) è buono, quello è per sempre buono, e chi (contro di esso) è cattivo, è per sempre cattivo» (*Apocalisse*, XXII, 11): così come se l'eternità e, con essa, la fine di tutte le cose fosse già ora sopravvenuta; — così si sono messi in moto sempre nuovi piani, dei quali spesso il più recente è solo la riproduzione di uno antico, come non ne mancheranno ancora di ultimissimi.

Io sono così consapevole della mia impotenza, a fare in ciò un nuovo e felice tentativo, che vorrei piuttosto, al che non occorre una grande forza d'invenzione, consigliare: lasciare le cose così, come ultimamente erano e s'erano dimostrate passabilmente buone durante una generazione. Siccome però questa forse non sarebbe l'opinione di uomini dallo spirito grande od almeno intraprendente: allora mi sia permesso, di notare modestamente, non tanto quel che essi avrebbero da fare, quanto quel che dovrebbero evitare di urtare, per non agire contro la loro propria intenzione (e fosse questa anche la migliore).

Il cristianesimo ha, oltre il grandissimo rispetto, inspirato irresistibilmente dalla santità delle sue leggi, anche qualcosa di *benigno*, in sè. (Non intendo qui la benignità della Persona, che ce lo ha acquistato con grandi sacrifici, ma della cosa stessa: ossia della costituzione morale, che Egli fondò; poichè quella si può desumere solo da questa). Il rispetto senza dubbio è la prima cosa, poichè senza di esso non vi può essere alcun vero

amore; sebbene anche senza amore si possa nutrire grande rispetto per qnalcheduno. Ma, se si viene non soltanto alla presentazione del dovere, ma anche all'esecuzione del dovere, se si chiede del motivo *subiettivo* delle azioni, dal quale solo, se lo si può prevedere, c'è da aspettarsi quello che l'uomo *farà*, e non del motivo *obiettivo*, di quel che *deve fare*: allora l'*amore*, come libero accoglimento della volontà di un altro tra le proprie massime, è un indispensabile complemento all'imperfezione della natura umana (di dover essere obbligata a quello, che la ragione prescrive con la legge): perchè, quel che uno fa malvolentieri, lo fa così stentatamente, ed anche con sofistiche scappatoie dal comandamento del dovere, che non si può contare molto sul *dovere*, come motivo delle azioni, senza l'intervento dell'*amore*.

Se ora, per farlo proprio buono, si aggiunge al cristianesimo un'autorità (sia anche essa divina), possa anche la sua intenzione essere retta e lo scopo realmente buono, allora però la benignità di esso sparisce: perchè è una contraddizione, comandare a qualcuno, che egli non solo faccia qualche cosa, ma la faccia anche volentieri.

Il cristianesimo ha per intènzione quella di promuovere amore alla osservanza del proprio dovere, e lo produce anche: perchè il suo fondatore non parla nella qualità di un comandante, che esprime la sua volontà richiedente ubbidienza, ma in quella di un amico dell'uomo, che mette nel cuore dei suoi fratelli la loro propria beneintesa volontà, secondo la quale essi agirebbero da sè stessi volontariamente, se si saggiassero come si conviene.

E dunque il modo di pensare *liberale* — egualmente lontano dallo spirito servile e dallo sfrenato — quello da cui il cristianesimo attende l'effetto per la sua dottrina e mediante cui guadagna i cuori degli uomini, dei quali la mente sia stata già illuminata dalla legge del dovere. Sebbene dunque il Maestro del cristianesimo annunzi anche *pene*, pure ciò non è da intendersi così, almeno non é conforme all'intima costituzione del cristianesimo lo spiegarlo così, come se quelle pene dovessero divenire i motivi, per eseguire i suoi comandamenti: perchè allora il cristianesimo cesserebbe di essere benigno. Si deve quindi interpretare ciò solo come un avviso amorevole, scaturito dalla benevolenza del legislatore, per guardarsi dal danno, che inevitabilmente sorgerebbe dalla violazione della legge (*lex est res surda et inexorabilis*, LIVIUS): perchè qui allora, non il cristianesimo quale massima di vita volontariamente assunta, ma la legge minaccia: la quale come ordine immutabile della natura delle cose, non lascia neanche allo stesso creatore l'arbitrio, di decidere le conseguenze in un senso od in un altro.

Se il cristianesimo indice *ricompense* (p. es.: « Siate contenti e consolati, perchè in cielo vi sarà tutto compensato »): ciò non deve essere interpretato, secondo il modo di pensare liberale, come se fosse un'offerta,

per attirare gli uomini alla buona condotta: perchè allora il cristianesimo sarebbe di nuovo da sè stesso non benigno. Solo l'esigenza di azioni, che scaturiscono da motivi non egoistici, può inspirare nell'uomo rispetto verso chi lo esige: ma sènza rispetto non v'è vero amore. Quindi a quella promessa non si deve dare il senso, come se le ricompense debbano essere considerate quali i motivi delle azioni. L'amore, con cui il modo di pensare liberale è avvinto al suo benefattore, non è diretto verso il bene, che il bisogno riceve, ma verso la bontà del volere di colui, che è disposto a parteciparlo: se anche non sia in grado di farlo, o ne sia impedito nell'esecuzione da altri motivi, che porta con sè la considerazione del bene generale del mondo.

Quest'è la benignità morale, che il cristianesimo porta con sè, la quale ancor sempre transpare attraverso le molte costrizioni impostegli col frequente mutare delle opinioni, e lo ha preservato dall'avversione, che altrimenti avrebbe dovuto colpirlo; in modo da farlo apparire (il che è notevole) in luce tanto più chiara anche nell'epoca della maggiore illuminazione [*Aufklärung*], che vi sia mai stata tra gli uomini.

Se al cristianesimo dovesse una volta avvenire, che cessasse di essere benigno (il che potrebbe accadere, se si armasse di autorità imperativa, invece del suo spirito mite): allora, siccome nelle cose morali, non v'è neutralità (e tanto meno coalizione di opposti principi), un'avversione ed opposizione contro di esso dovrebbe divenire il modo di pensare dominante degli uomini; e l'*anticristo*, che anche senza di ciò è ritenuto quale il precursore dell'ultimo giorno, avrebbe il suo regno, se anche di breve durata, fondato presumibilmente sulla paura e sull'egoismo: ma subito dopo, siccome il cristianesimo invero è destinato ad essere religione universale, ma dal destino non sarebbe stato aiutato a divenirla, avverrebbe, sotto l'aspetto morale, la (inversa) *fine di tutte le cose.*

Osservazioni del traduttore

Alla nota 1. — In questa nota vi è una strana mescolanza di cose, che non hanno più alcun valore scientifico, e di altre invece, che preludono a posteriori scoperte. Vi si sente il primo balbettio delle scienze filologiche e, al tempo stesso, l'intuizione della parentela delle lingue indoeuropee: se anche tale parentela sia voluta dimostrare con l'ingenuo avvicinamento di *arge Mann* a *Ahriman* e di *gute Mann* a *Codomanus* ed a *Godeman*. Questo nome *Godeman* era stato letto da KANT nella traduzione tedesca, pubblicata a Zurigo nel 1783, *Reise nach Ostindien und China, etc.* dell'opera di PIERRE SONNERAT, *Voyage aux Indes orientales et à Chine, etc.*, Paris 1782; nella quale il viaggiatore francese indica *Godeman* come il dio buono dei barmani (birmani). Ora noi sappiamo, che *Godeman* non è altro che *Gotamo*: il nome gentilizio del BUDDHA, che è

il buon Maestro, venerato ed adorato da due millenni nella Birmania (Barma), inconsapevolmente interpretato da KANT come il principio buono della religione di quei popoli. Consapevolmente, invece, egli distinse in *Ormuz* ed *Arimane* il principio buono ed il cattivo dell'antica religione dualista persiana di Zoroastro o ZARATUSTRA. Con la stessa sicura consapevolezza egli in questo suo saggio intuisce il nucleo del *misticismo* di LAO-TSE o, com'egli lo chiama, LAO-KIUN, consistente nel riassorbimento nel *Tao*, il sommo bene, che è in fondo il *Nulla*: come quello dei *panteisti* tibetani ed asiatici orientali. Più esattamente avrebbe potuto anche sentenziare se avesse potuto conoscere la parte teoretica, così simile al suo idealismo transcendentale, del pensiero di LAO-TSE, com'è, p. es., espressa nel detto di CIUANG-TSE, taoista del quarto secolo a. C.: «Questa notte ho sognato di essere una farfalla: sono ora l'uomo, che ha sognato di essere farfalla, o sono la farfalla, che sogna ora di essere uomo?» È anche notevole che KANT, continuando nel suo scritto l'analisi delle religioni e riconoscendo nel cristianesimo la qualità essenziale della benignità e dell'amore, finisce quasi col venir meno al suo principio fondamèntale, proclamato nella *Critica della ragione pratica*, dell'imperativo categorico del dovere, quale unico fondamento della morale, e conchiude col confessare, che non si può contare molto sul *dovere*, quale motivo delle azioni, senza l'intervento dell'*amore*. Così egli si accorda con SCHOPENHAUER, il discepolo spirituale e continuatore di KANT fino alla fine, il quale riconosce (*Die Welt als Wille und Vorstellung*, vol. II. § 48), che lo spirito ascetico del rinnegamento di sè e del superamento del mondo e l'amore illimitato del prossimo, anche del nemico, costituiscono il tratto fondamentale, che il cristianesimo ha in comune col brahmanesimo e col buddhismo, e ne palesano la parentela.

Alla nota 2. — Al principio di questa nota KANT esprime una certa indignazione per quei sistemi filosofici, che rappresentano in modo pessimista la vita terrena, e li classifica in quattro categorie, assai acutamente designate. Così, p. es., la terra rappresentata come un *caravanserraglio* corrisponde esattamente ad un *rubaiyat* di OMAR KHAYYAM. «Questo vecchio caravanserraglio che chiamano il mondo»; e quella, vista come un *penitenziario*, è giustamente riportata ai brâhmani, buddhisti ed altri savii dell'Oriente, nonchè allo stesso PLATONE. Ma la sua indignazione è da accogliersi *cum grano salis*. Non bisogna infatti dimenticare quel che KANT stesso scrisse il 10 aprile 1794 al direttore BIESTER, annunziandogli per la sua rivista l'invio del saggio su *La fine di tutte le cose*: «che si dovrà leggere parte piangendo parte ridendo, *welche theils kläglich theils lustig zu lesen seyn wird*»: piangendo sulle miserie, gli affanni ed i dolori della prole dell'uomo; ridendo per la fatuità di essa, che *signora e fine crede sè data al tutto*; sì che l'intenzione di KANT si palesa assai simile al moto del cuore di LEOPARDI: *Non so se il riso o la pietà prevale.* Tale intenzione traspare visibilmente dalla compiacenza, con cui egli s'intrat-

tiene sulla *trovata originale dell' arguto persiano*, della terra paragonata ad una cloaca: paragone, che può bilanciare quello de «l'aiuola che ci fa tanto feroci» di DANTE.

Il compiacimento di KANT per una rappresentazione così spregevole del genere umano non è, del resto, nuovo in lui. Come in questo caso parla della trovata originale di uno spiritoso persiano, *persischen Witzling*, così nell'appendice alla terza parte della sua *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, del 1775, parlando degli abitanti degli astri riporta la satirica rappresentazione di quella testa spiritosa dell'Aja, *die satyrische Vorstellung jenes witzigen Kopfes aus dem Haag (the satirical rogue*, direbbe AMLETO), che aveva paragonato gli abitanti della terra a quelli delle selve sulla testa di un pezzente, i quali ritenevano quella come una sfera immensa e sè stessi come il capolavoro della creazione; fino a quando uno di essi, dotato dal cielo di un'anima più fine, scoprì la testa di un nobile e gridò in estasi ai suoi simili: «Noi non siamo gli unici esseri viventi di tutta la natura; vedete qui una nuova terra; qui vi sono altri pidocchi». E qui il pacifico ed indulgente KANT non si può trattenere dall'aggiungere: «Giudichiamo senza pregiudizi. Questo insetto, il quale, sià per il suo modo di vivere che per la sua nullità, esprime molto bene la costituzione della maggior parte degli uomini, può essere a buon diritto usato per un tale paragone. Perchè, siccome, secondo la sua immaginazione, la natura tiene molto alla sua esistenza, esso ritiene inutile tutta la creazione, che non abbia esatta relazione col suo genere, punto centrale di tutti i suoi scopi. L'uomo, che è egualmente lontano dai sommi gradi degli esseri, è così presuntuoso, da adularsi, con eguale immaginazione, della necessità della propria esistenza. L'infinità della creazione, invece, comprende in sè con eguale necessità tutte le creature, prodotte dalla sua esuberante ricchezza. Dalla classe più alta, tra gli esseri pensanti, fino al più spregevole insetto, nessun membro le è indifferente e nessuno può mancare, senza che ne venga interrotta la bellezza del tutto. Intanto tutto viene determinato da leggi generali, che la natura effettua con la combinazione delle forze in lei originariamente insite. Siccome nel suo procedere essa produce decoro ed ordine, nessuna singola intenzione deve turbare ed interrompere i suoi effetti. Nella sua prima formazione la produzione di una pianta fu solo un effetto infinitamente piccolo della sua fecondità; e sarebbe quindi assurdo, che le sue leggi così ben fondate dovessero seguire gli scopi speciali di questo atomo. Se la costituzione di un corpo celeste oppone ostacoli naturali alla vita, esso rimarrà disabitato, anche se in sè e per sè fosse più bello se abitato. L'eccellenza della creazione con ciò non perde nulla, perchè tra tutte le grandezze l'infinito è quella che non viene diminuita dalla sottrazione di una parte finita. Sarebbe, come se si volesse lamentare, che lo spazio tra Marte e Giove è così inutilmente vuoto e che le comete non sono abitate. Nel fatto, quell'insetto, per quanto ci

possa apparire spregevole, sta per la conservazione della sua classe più a cuore della natura che non un piccolo numero di eccellenti creature, perchè ve ne resta sempre un'infinità, anche se gli vien tolto un luogo od una sede Siccome però è inesauribile nella produzione di entrambi, così si vedono indifferentemente l'uno e l'altro abbandonati alle leggi generali della loro conservazione e distruzione. Ha forse mai il possessore di quelle selve abitate, sulla testa di un pezzente, causato tra le popolazioni di quella colonia più grandi distruzioni di quelle che produsse, tra i suoi conterranei, il figlio di FILIPPO, quando il suo cattivo genio gli mise in testa, che il mondo era stato fatto solo per lui? »

Questo avvicinamento di ALESSANDRO MAGNO ai pidocchi mi richiama alla mente (e così finisco) lo stesso pensiero espresso dal grande MARCO AURELIO nelle sue riflessioni *su sè stesso* (III, 3): « Alessandro, dopo aver distrutto dalle fondamenta intere città e trucidato in battaglie campali decine di migliaia di cavalieri e di fanti, uscì infine anch'egli di vita.... i pidocchi uccisero Democrito, ed altri pidocchi uccisero Socrate: Δημόκριτον δὲ οἱ φθεῖρες, Σωκράτην δὲ ἄλλοι φθεῖρες ἀπέκτειναν ».

SEMPLIFICAZIONE ALLA SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI

Nota dell'ing. **Franco Mazzarella**, *presentata dal socio ord.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 1. maggio 1943)

Sunto. — Si espone un metodo per la determinazione della soluzione di un sistema di n equazioni lineari algebriche. Questo consiste nella introduzione preventiva di altre n incognite che sono legate alle prime da una opportuna sostituzione lineare. Tanto alla conoscenza delle incognite ausiliarie quanto, una volta conosciute queste, ad ottenere quelle che interessano il problema, si giunge in modo ricorrente senza alcun processo di laboriosa eliminazione.

Uno dei problemi che capita più spesso in ogni campo delle applicazioni della matematica e particolarmente agli ingegneri è quello della soluzione numerica di un sistema di equazioni lineari algebriche.

È noto che tale problema, se dal punto di vista teorico non offre alcuna difficoltà, essendo di immediata soluzione per mezzo delle formule di CRAMER, riesce molto laborioso non appena il numero di incognite si eleva al di-sopra di cinque o sei: infatti lo sviluppo di un determinante di ordine piuttosto alto contiene un sì gran numero di termini che applicare queste

formole importa un lavoro tale ed una tale probabilità di commettere errori che si preferisce rinunziare ad esse per servirsi degli elementari procedimenti di eliminazione anche questi tutt'altro che agevoli e spediti.

Pertanto sono stati indicati numerosi metodi, ispirati a svariati criteri, coi quali si cerca di giungere alla conoscenza della soluzione del sistema, sia pure in via approssimata, seguendo un cammino meno lungo e che dia maggiore possibilità di controllo.

Vogliamo qui esporre un metodo applicabile ad un generico sistema di equazioni lineari che conduce alla conoscenza della soluzione esatta e che, mentre non impone alcuna ipotesi restrittiva ai valori dei coefficienti, elimina completamente le laboriose sostituzioni.

Sia da risolvere il sistema di n equazione ad altrettante incognite:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots . a_{1n}x_n = A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots . a_{2n}x_n = A_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots . a_{nn}x_n = A_n \end{cases}$$

Introduciamone altre n nuove $\xi_1 \ldots . \xi_n$ legate alle x dalle relazioni:

$$(2)\quad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots . b_{1n}x_n = \xi_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots . b_{2n}x_n = \xi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots . b_{nn}x_n = \xi_n \end{cases}$$

dove i coefficienti b restano così definiti:

$$(*)\quad \begin{cases} b_{rr} = 1; \\ b_{ts} = 0 \text{ per } t > s; \\ b_{ts} \text{ per } t < s \text{ da determinare in base alle condizioni che vedremo.} \end{cases}$$

Consideriamo ora il sistema che risulterebbe sostituendo in (1) le ξ al posto delle x mediante le relazioni che si otterrebbero invertendo le (2) e sia tale sistema:

$$(3)\quad \begin{cases} c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \ldots . + c_{1n}\xi_n = A_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}\xi_1 + c_{n2}\xi_2 + \ldots . + c_{nn}\xi_n = A_n \end{cases}$$

Per le note proprietà dei sistemi di equazioni si ha che inversamente il sistema (1) si otterrebbe dal (3) sostituendo in esso le x alle ξ per mezzo

delle (2) e avremo perciò le relazioni

$$(4) \qquad a_{rs} = \sum_{t=1}^{t=n} c_{rt}\, b_{ts}\,.$$

Le quali sono in numero di n^2, cioè tante quanti sono i coefficienti a, e possono considerarsi come altrettante equazioni da cui si potrebbero determinare i valori delle c qualora fossero noti quelli di tutte le b.

Più generalmente, da queste equazioni si possono ricavare n^2 coefficienti alcuni appartenenti alle b e altri alle c purchè si siano assegnati precedentemente tutti gli altri rimanenti sia delle c sia delle b. Poichè inizialmente abbiamo lasciati da determinare $\frac{(n-1)n}{2}$ coefficienti b ne possiamo fissare tanti delle c, e propriamente possiamo porre uguali a zero tutte le c_{rt} con $t > r$; andiamo ora a vedere che si possono, in modo semplice ricavare tutti gli altri coefficienti b e c inizialmente incogniti.

Avendo presente le condizioni finora imposte i sistemi (2) e (3) diventano

$$(2)' \qquad \begin{cases} x_1 + b_{12}\, x_2 + b_{13}\, x_3 + \dots b_{1n}\, x_n = \xi_1 \\ \qquad x_2 + b_{23}\, x_3 + \dots b_{2n}\, x_n = \xi_2 \\ \qquad\qquad x_3 + \dots b_{3n}\, x_n = \xi_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = \xi_n \end{cases}$$

$$(3)' \qquad \begin{cases} c_{11}\,\xi_1 = A_1 \\ c_{21}\,\xi_1 + c_{22}\,\xi_2 = A_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}\,\xi_1 + c_{n2}\,\xi_2 + \dots c_{nn}\,\xi_n = A_n \end{cases}$$

sicchè per la forma triangolare assunta da essi si possono agevolmente ricavare da (3)′ tutte le ξ (a partire da ξ_1 fino a ξ_n) e successivamente servendosi di (2)′ ottenere tutte le x (iniziando da x_n fino a x_1) raggiungendo così lo scopo del nostro lavoro.

Per la determinazione dei coefficienti c e b ancora incogniti cominciamo con l'osservare che, poichè le c_{rt} con $r < t$ sono nulle, e parimenti le b_{ts} con $t > s$, nelle sommatorie (4) si può far variare t anzichè da 1 ad n, da 1 al più piccolo tra i due numeri r e s dal che, come vedremo, i coefficienti b e c si determinano l'uno dopo l'altro senza bisogno di alcun procedimento laborioso. Infatti ponendo successivamente prima $s = 1$ e poi $r = 1$ abbiamo immediatamente per le c_{r1} e b_{1s}:

$$a_{11} = c_{11}\, b_{11} \quad \text{da cui} \quad c_{11} = a_{11} \quad (\text{poichè} \quad b_{11} = 1)$$
$$a_{r1} = c_{r1}\, b_{11} \quad \text{da cui} \quad c_{r1} = a_{r1}$$
$$a_{1r} = c_{11}\, b_{1r} \quad \text{da cui} \quad b_{1r} = a_{1r}/a_{11}$$

Supponiamo ora di avere già calcolato tutte le b_{ts} e le c_{rt} rispettivamente per le prime v file e per le prime v colonne e facciamo vedere che si possono ricavare immediatamente quelle della fila e colonna successiva, cioè corrispondente al valore $v + 1$ rispettivamente del I e del II indice.

Abbiamo infatti, che per un qualunque $m > v + 1$ si ha:

$$a_{m, v+1} = \sum_{t=1}^{t=v+1} c_{m,t} b_{t, v+1} = \sum_{t=1}^{t=v} c_{m,t} b_{t, v+1} + c_{m, v+1} b_{v+1, v+1}$$

da cui si ricava immediatamente (sempre tenendo conto che $b_{v+1, v+1} = 1$)

$$c_{m, v+1} = a_{m, v+1} - \sum_{t=1}^{t=v} c_{m,t} b_{t, v+1}$$

Identicamente si ha:

$$a_{v+1, m} = \sum_{t=1}^{t=v+1} c_{v+1, t} \, b_{tm} = \sum_{t=1}^{t=v} c_{v+1, t} b_{t, m} + c_{v+1, v+1} \cdot b_{v+1 \, m}$$

da cui

$$b_{v+1, m} = \frac{a_{v+1, m} - \sum_{t=1}^{t=v} c_{v+1, t} \cdot b_{tm}}{c_{v+1, v+1}}$$

e poichè nella sommatoria compaiono solo termini delle prime v colonne o file, è chiaro come le c di una data colonna, ovvero le b di una data linea, possono ottenersi non appena conosciute quelle delle righe o colonne precedenti.

A conclusione del metodo esposto osserviamo che le condizioni da noi imposte ai coefficienti b e c avrebbero potuto anche essere assegnate in maniera alquanto diversa e saremmo giunti sempre al medesimo risultato: propriamente come si rileva facilmente dal procedimento seguito le condizioni essenziali a cui devono sottostare le b e le c possono porsi così:

1) una delle diagonali, di una delle due matrici, quella della b o quella della c, deve avere i termini tutti uguali ad 1,

2) in una delle matrici saranno nulli tutti i termini al disopra o al disotto di tale diagonale, nell'altra invece saranno diversi da zero soltanto i termini situati sulla diagonale avanti considerata e quelli che occupano il posto degli zeri dell'altra matrice.

Applichiamo il procedimento indicato alla soluzione del seguente sistema (il quale si è presentato recentemente nella soluzione di un problema tecnico):

$$\begin{aligned}
&18\,x_1 + 9\,x_2 + 7\,x_3 - 5{,}4\,x_4 - 7{,}1\,x_5 + 2\,x_6 + 4{,}3\,x_7 = 57\\
&9\,x_1 + 21\,x_2 + 13\,x_3 - 2{,}7\,x_4 - 5{,}4\,x_5 + 4\,x_6 + 2{,}4\,x_7 = 36\\
&7\,x_1 + 13\,x_2 + 19{,}4\,x_3 - 7{,}1\,x_4 - 3{,}5\,x_5 + 3{,}5\,x_6 - 1{,}8\,x_7 = 61\\
&-10\,x_1 - 15\,x_2 + 2\,x_3 + 12\,x_4 + 9\,x_5 + 7{,}3\,x_6 + 5\,x_7 = 41\\
&-18\,x_1 + 4\,x_2 - 7\,x_3 + 9\,4_4 + 16.4\,x_5 + 10{,}1\,x_6 + 7{,}1\,x_7 = 85\\
&3\,x_1 - 5{,}5\,x_2 - 9{,}1\,x_3 + 7{,}3\,x_4 + 10{,}1\,x_6 + 19\,x_6 + 3{,}9\,x_7 = 56\\
&\qquad\qquad\qquad + 5\,x_4 + 7{,}1\,x_5 + 3{,}9\,x_6 + 10{,}5\,x_7 = 40.
\end{aligned}$$

Nota. — Successivamente alla presentazione di questa nota son venuto a conoscenza di un fascicolo di saggio, costituito da alcune pagine che compariranno nel libro di prossima pubblicazione costituente il II volume del trattato di Scienza delle Costruzioni di O. Belluzzi (Ed. Zanichelli Bologna). In queste pagine è riportato un metodo di soluzione dei sistemi di equazioni lineari dovuto al Banachiewicz, in cui ricorrendo a delle matrici, opportunamente definite, dette Cracoviani, si giunge ad un risultato analogo a quello cui siamo pervenuti precedentemente.

Per maggior chiarimento sul metodo di Banachiewicz il Belluzzi rimanda ad una memoria dello stesso dal titolo: « *Études d'analyse pratique* » (Acc. polacca di Sc. e Lett. Cracovia 1938) e ad una nota di Arend « *Voies nouvelles dans le calcul scientifique* » (Ciel et terre. Bruxelles 1941).

Determinazione del carico critico di un cilindro caricato di punta soggetto a vincoli elastici

Nota dell'ing. **Franco Mazzarella**, *presentata dal socio ord.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 1. maggio 1943)

Sunto. — Si considera un solido cilindrico sollecitato a compressione nelle più generali condizioni di vincolo elastico alle due basi e si determina l'equazione la cui soluzione dà il valore del carico critico e conseguentemente la lunghezza libera di flessione del solido stesso. Si indica un procedimento per la soluzione dell'equazione trovata.

Vogliamo determinare il carico critico per un cilindro sollecitato di punta e vincolato alle due basi da legami elastici, cioè capaci di esercitare delle reazioni di intensità direttamente proporzionale agli spostamenti subiti.

Assumiamo come riferimento un sistema di assi cartesiani ortogonali, con l'origine nel baricentro di una delle basi del cilindro, con l'asse x diretto secondo l'asse geometrico di questo, positivo nel verso dell'altra base; il piano xy contenga uno degli assi principali d'inerzia della sezione trasversale e propriamente il maggiore, sia cioè quello di minor resistenza, in cui avverrebbe l'inflessione al raggiungersi del carico critico.

Consideriamo una forza esterna di intensità P diretta secondo l'asse x ed agente con un'eccentricità e nel piano xy.

Indichiamo con f lo spostamento in direzione dell'asse y subito, a deformazione avvenuta, da una base rispetto all'altra, con l la lunghezza del solido e con α_1 ed α_2 le inclinazioni della linea elastica in corrispondenza delle due basi; (α_1 quella relativa alla base dove abbiamo posto l'origine).

Trascureremo il contributo portato alle deformazioni dallo sforzo normale e da quello di taglio e perciò potremo non introdurre nei calcoli le componenti delle reazioni dirette secondo l'asse x e considerare sulla prima base (cioè quella dove si ha l'origine) la componente secondo l'asse y di intensità $-R$ ed una coppia giacente nel piano xy di momento M_1 e sulla seconda una forza R ed una coppia M_2; per quanto riguarda il segno dei momenti flettenti stabiliamo, come si fa generalmente, di assumere come positivi quelli che provocano trazione nelle fibre cui compete y positiva, le reazioni sono state considerate positive quando il loro verso risulta opposto a quello dell'asse y.

Per l'equilibrio si avrà:

$$M_1 = M_2 + Rl - P(e+f) \tag{1}$$

e chiamando con $y(x)$ lo spostamento trasversale della generica sezione di ascissa x avremo per il momento flettente in tale sezione l'espressione

$$M(x) = M_2 + R(l-x) - P(e+f-y) \tag{2}$$

da cui abbiamo che l'equazione differenziale della linea elastica è:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(e+f-y) - R(l-x) - M_2}{EI} \tag{3}$$

poniamo $P/EI = \mu^2$ ed allora possiamo scrivere la (3)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu^2 y = \mu^2 \left[e + f - \frac{R(l-x)}{P} - \frac{M_2}{P} \right] \tag{3'}$$

il cui integrale generale è:

$$y = A \operatorname{sen} \mu x + B \cos \mu x + e + f - \frac{R(l - x)}{P} - \frac{M_2}{P}. \qquad (4)$$

Per le ipotesi fatte sui vincoli e per le convenzioni poste per i segni abbiamo che:

$$R = kf \qquad M_1 = -k_1 \alpha_1 \qquad M_2 = k_2 \alpha_2 \qquad (5)$$

dove $k, k_1 k_2$, sono tre costanti positive che rappresentano rispettivamente k la forza necessaria a far subire alle basi uno spostamento unitario, k_1 e k_2 i momenti, che applicati ai due vincoli fanno loro subire una rotazione unitaria.

Tenendo conto delle (5) la (4) può scriversi:

$$y = A \operatorname{sen} \mu x + B \cos \mu x + e + f - \frac{kf(l - x)}{P} - \frac{k_2 \alpha_2}{P} \qquad (4')$$

in cui sono da determinare A, B, f, ed α_2 tenendo conto delle condizioni ai vincoli e propriamente che:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0; \\ k_1 y'(0) = -M_1 = -M_2 - Rl + P(e+f) = -k_2\alpha_2 - kfl + P(e+f) \\ y(l) = f \quad ; \quad y'(1) = \alpha_2 . \end{array}\right\} \qquad (6)$$

La prima condizione (6) porta immediatamente alla relazione

$$B + e + f - \frac{kfl}{P} - \frac{k_2 \alpha_2}{P} = 0 \qquad ; \qquad B = -e - f + \frac{kl}{P} f + \frac{k_2 \alpha_2}{P}$$

che permette di scrivere la (4) come segue:

$$y = A \operatorname{sen} \mu x + \left(e + f - \frac{kfl}{P} - \frac{k_2 \alpha_2}{P}\right)(1 - \cos \mu x) + \frac{kfx}{P}. \qquad (4'')$$

Passando quindi a tener conto della seconda delle (6) abbiamo:

$$y'(0) = A\mu + \frac{kf}{P} = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{kfl}{k_1} + \frac{P(e+f)}{k_1}$$

dalla quale ricaviamo per A l'espressione:

$$A = \frac{(e+f)P}{\mu k_1} - \frac{kfl}{\mu k_1} - \frac{k_2}{\mu k_1}\alpha_2 - \frac{kf}{\mu P}$$

che sostituita nella (4) dà:

$$y = \left[\frac{(e+f)P}{\mu k_1} - \frac{kfl}{\mu k_1} - \frac{k_2}{\mu k_1}\alpha_2 - \frac{kf}{\mu P}\right] \operatorname{sen} \mu x + \left(e + f - \frac{kfl}{P} + \right.$$
$$\left. + \frac{k_2 \alpha_2}{P}\right)(1 - \cos \mu x) + \frac{kfx}{P} \tag{7}$$

Considerando ora la III e IV condizione (6) abbiamo il sistema

$$\left.\begin{aligned} & f\left[\left(\frac{P}{\mu k_1} - \frac{kl}{\mu k_1} - \frac{k}{\mu P}\right) \operatorname{sen} \mu l - \left(1 - \frac{kl}{P}\right) \cos \mu l\right] - \alpha_2 \left[\frac{k_2}{\mu k_1} \operatorname{sen} \mu l + \right. \\ & \left. + \frac{k_2}{P} - \frac{k_2 \cos \mu l}{P}\right] = -e\left[\frac{P \operatorname{sen} \mu l}{\mu k_1} + 1 - \cos \mu l\right] \\ & f\left[\left(\frac{P}{k_1} - \frac{kl}{k_1} - \frac{k}{P}\right) \cos \mu l + \left(1 - \frac{kl}{P}\right) \mu \operatorname{sen} \mu l + \frac{k}{P}\right] - \alpha_2 \left[1 + \frac{k_2}{k_1} \cos \mu l + \right. \\ & \left. + \frac{k_2}{P} \mu \operatorname{sen} \mu l\right] = -e\left[\frac{P}{k_1} \cos \mu l + \mu \operatorname{sen} \mu l\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Osserviamo ora che qualora il carico P fosse centrato sarebbe $e = 0$ ed allora i termini noti delle due equazioni del sistema (8) sarebbero nulli cioè il sistema sarebbe omogeneo e pertanto potrebbero aversi due casi o il determinante di esso è diverso da zero ed allora l'unica soluzione possibile è $f = \alpha_2 = 0$ e quindi $A = B = 0$ cioè l'asse della trave rimane rettilineo ovvero il determinante è nullo ed allora la soluzione di (7) è indeterminata il che corrisponde alla possibilità di infinite configurazioni di equilibrio per la trave ciò che significa che tutti i valori di P che provocano questo annullamento sono altrettanti carichi critici di cui evidentemente interessa in pratica il più piccolo che sarà proprio il carico critico che vogliamo determinare.

Lo sviluppo del determinante in parola uguagliato a zero dà:

$$\left(1 - \frac{2kk_2}{P^2} - \frac{kl}{P} + \frac{k_2}{k_1} - \frac{kk_2 l}{k_1 P}\right) \cos \mu l + \left(\frac{k}{\mu P} + \frac{kl}{\mu k_1} - \frac{P}{\mu k_1} + \frac{k_2 \mu}{P} + \right.$$
$$\left. - \frac{kk_2 l \mu}{P^2} + \frac{kk_2}{P \mu k_1}\right) \operatorname{sen} \mu l + \frac{2kk_2}{P^2} = 0 \tag{9}$$

che è l'equazione da cui si può ricavare il valore del carico critico. Per poter meglio esaminare questa equazione poniamo le seguenti relazioni:

$$x = l\mu \quad ; \quad k_1 = a_1 EI/l \quad ; \quad k_2 = a_2 EI/l = a_2 P/l\mu^2 = a_2 Pl/x^2$$
$$k = aEI/l^3 = aP/l^3\mu^2 = aP/lx^2$$

dove tanto x quanto le a sono dei numeri adimensionali, dopo di che con facili semplificazioni la (9) si può scrivere:

$$[(a_1 + a_2)(x^4 - ax^2) - 2aa_1a_2] \cos x + [a(a_1 + a_2) + ax^2 - x^4 + \\ + a_1a_2(x^2 - a)] \, x \operatorname{sen} x + 2aa_1a_2 = 0.$$

L'equazione ora scritta ci dà il valore di x a cui corrisponde il carico critico in funzione di a, a_1, a_2, cioè dei tre parametri che definiscono il comportamento elastico dei vincoli.

Tenuto conto che $x = \mu l$ cioè che $x^2 = Pl^2/EI$ abbiamo che il carico critico è dato da:

$$P_c = x^2 EI/l^2$$

e ricordando la nota formula di Eulero in cui compare la lunghezza libera di flessione l'

$$P_c = \pi^2 EI/l'^2$$

abbiamo che:

$$l' = l\pi/x$$

mediante la quale una volta calcolato x siamo in grado di conoscere la lunghezza libera di flessione, e di applicare quindi le consuete formule per la verifica di stabilità.

Commemorazione del socio corrispondente Giuseppe Zirpolo

letta dal socio ordinario **Umberto Pierantoni**

(Adunanza del dì 6 giugno 1944)

Il 25 dicembre 1943 è mancato ai vivi il nostro socio corrispondente prof. Giuseppe Zirpolo. Ancor giovane, non aveva che cinquantasei anni (era nato a Napoli il 31 gennaio 1887), ed ancora nel pieno vigore della sua grande attività di studioso e d'insegnante, Giuseppe Zirpolo era da poco ritornato a Nopoli dopo un breve periodo di riposo, durante il quale erano maturati eventi cesì gravi per la nostra città, ed aveva ripreso le sue occupazioni di insegnante e studioso, malgrado la sua non ferma salute, con coraggio e serenità, quando l'acutizzarsi del suo male venne a stroncarne la laboriosa esistenza.

Giuseppe Zirpolo fu un assiduo ricercatore. In circa centoventi memorie originali che egli lascia, aveva fatto progredire assai notevolmente gli studii in vari campi della biologia, spaziando dalla meccanica dello sviluppo alla ecologia degli animali, dalla batteriologia allo studio dell'azione dei varii agenti fisici e chimici sulla vita degli organismi e dei microrganismi. La sua indagine si esplicò nei campi più varii del regno animale: dagli Anfibi agli Echinodermi, dai Briozoi ai Calenterati, dai Tunicati agli Anellidi, agli Artropodi, ai Molluschi. La sua lunga permanenza alla Stazione Zoologica di Napoli, dove fu per un lungo periodo oltre che studioso anche bibliotecario, lo pose al cospetto della vita del mare e della moderna letteratura scientifica ed egli ne trasse grande profitto. Potè così ivi redigere la grande monografia sul *Zoobotryon pellucidum*, che costituì una pietra miliare nelle conoscenze sulla biologia e lo siluppo dei Briozoi marini, e che venne premiata dall'Accademia Pontaniana. Di tale monografia il Harmer, noto specialista del gruppo, nei Proceedings of the Roy. Soc. di Londra (1930) ebbe a dire trattarsi « di stupendo lavoro in cui la mole enorme delle ricerche giunge a risultati di grande interesse ».

Improntati a criteri moderni di ricerca sperimentale sono anche i molti lavori dello Z. sulla rigenerazione degli Echinodermi e Celentrati, che trovarono anch'essi larga eco nel mondo scientifico e furono citati in tutti i più importanti trattati di Zoologia e Meccanica dello sviluppo (Korschelt, Caullery, Przibram, Stolte. Hanstrom, Pierantoni ecc.).

L'aver prestato servizio nel corpo di Sanità durante la prima guerra mondiale fruttò allo Zirpolo una profonda cultura ed una squisita tecnica di batteriologo che gli permisero di intraprendere poi ricerche originalis,

sime anche in questo campo della biologia. Trattò in esso specialmente i batteri luminosi, quasi ignoti nella loro biologia fino al suo tempo. Le sue ricerche sistematiche sui batteri fotogeni degli organi luminosi di *Sepiola* e *Rondeletia*, oppugnate in un primo tempo dalla scuola batteriologica romana, trovarono luminosa e definitiva conferma nelle ricerche compiute dalla MEISSNER, venuta a bella posta a Napoli per controllarli. In questi studii l'autrice potè dimostrare con la prova serologica la legittimità delle nuove specie da lui istituite.

Gli originali studii sulla resitenza di questi batterii alle bassissime temperature compiuti dal Nostro nell'Istituto Criogenico di Leida ove potè esporli all'azione dell'elio liquido conservandoli in vita, sono restate classiche e citate in tutti i più moderni trattati di Batteriologia e Patologia a proposito della resistenza dei fotogeni a tali temperature.

La grande mole delle ricerche dello ZIRPOLO non ne consente qui un esame particolareggiato.

Egli fu un vero entusiasta dei suoi studii e per giungere a risultati concreti non esitò ad affrontare spese e viaggi all'estero, dove frequentò i più moderni ed attrezzati istituti. Ricorderemo a tal proposito anche la sua serie di studii sull'azione dell'acqua pesante sulla vita degli animali, con cui egli ha chiuso, si può dire, la sua grande attività di studioso: attività veramente meravigliosa se si pensa che essa si svolse per oltre un ventennio contemporaneamente ad un assillante lavoro di 20 ore settimanali di insegnamento nelle scuole medie, oltre all'insegnamento efficacissimo esercitato come libero docente ed incaricato nella nostra Università.

Egli infatti fu professore a Caserta e poi per molti anni a Napoli, prima nel Collegio Militare della Nunziatella, ed infine nel Liceo Artistico, oltre che incaricato nella nostra Università, prima di Embriologia e Meccanica dello sviluppo e poi di Zoologia generale e Parassitologia. Egli aspirò lungamente, e con legittimo desiderio, a diventare titolare nelle Università e solo per eventi indipendenti dai suoi meriti scientifici non vi era ancora pervenuto, pur essendo stato dichiarato per più volte e fin dal 1930 maturo ad unanimità dalle Commissioni di concorso per tale grado d'insegnamento.

Dotato di animo profondamente buono e d'una illimitata comprensione dei dolori del mondo e delle sofferenze degli umili, egli è morto povero pur avendo sortito agiate condizioni di famiglia.

I numerosi amici e discepoli che quotidianamente lo circondavano delle loro affettuose premure vivamente ne piangono l'immatura scomparsa e la scienza vede spegnersi con lui un valoroso e singolare studioso.

Sugli stereoisomeri della serie cinnamica *(Acidi f. n. cinnamici)*

Nota della socia **M. Bakunin** *e della dott.* **A. Accurso**

(Adunanza del dì 6 giugno 1944)

Sunto. — Con una serie di esperienze sistematiche gli AA. hanno ricercato le condizioni più opportune per ottenere le massime rese per le tre coppie di isomeri degli acidi fenilnitrocinnamici (o—, m— e p—), che si preparano con la sintesi di Perkin-Oglialoro e che prsentano l'isomeria etilenica. Sono stati poi preparati i sali di sodio e di magnesio (ed in alcune circostanze anche quelli di litio e di cesio) dei detti acidi.

Tanto gli acidi, quanto i sali, sono stati sottoposti a trattamenti termici ed alla irradiazione da parte della luce solare oppure della luce, ricca di radiazioni ultravioletto, di lampade a vapori di mercurio per studiare la trasformazione degli isomeri trans (a) nei cis (b) e determinare le condizioni di miglior rendimento.

Premessa. — Il 12 settembre 1943 per rappresaglia fu, dai soldati tedeschi, appiccato il fuoco all'Università di Napoli ed alle sue dipendenze.

Si sono avuti a lamentare in questa tristissima circostanza oltre la distruzione di parte degli edifici Universitari e degli Istituti annessi, la distruzione completa della Società Reale, la cui biblioteca era di fama mondiale per la ricchezza e la varietà delle opere, alcune delle quali rare ed ormai non più ritrovabili.

In questi incendi, che hanno colpito anche il nostro Istituto e la mia abitazione, sono andati perduti molti documenti e tra gli altri le notizie bibliografiche ed i documenti analitici riguardanti il lavoro che è oggetto di questa pubblicazione.

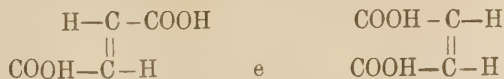
Per quanto si sia cercato di ripetere alcune delle esperienze e di utilizzare alcuni dati, che per fortunato caso erano stati riportati in una relazione parziale, molti mancano e si è dovuto ad essi sostituire l'esposizione dei risultati avuti, omettendo molte cifre e particolari di notevole interesse.

PARTE GENERALE

Sono da considerarsi derivati dall'etilene tutti quei prodotti nei quali uno o parecchi idrogeni dell'etilene sono sostituiti da elementi o aggruppamenti, uguali o differenti.

Se tale sostituzione ha luogo almeno per due atomi di idrogeno collegati ciascuno ai due atomi di carbonio del nucleo etilenico si ha l'isomeria

caratteristica, che prese il nome di isomeria fumarica e maleica o trans e cis, corrispondente alle proiezioni delle formule spaziali dell'acido fumarico e maleico:

```
     H—C–COOH              COOH–C—H
       ||                       ||
COOH—C–H          e        COOH—C–H
```

Le varie denominazioni assial-simmetrica e piano-simmetrica, trans e cis sono fondate sull'esistenza di piani di simmetria, che spesso mancano quando i sostituenti sono differenti ed in maggior numero.

In luogo di tali denominazioni è preferibile usare indicazioni con lettere dell'alfabeto latino *a* e *b*, tralasciando le greche che, come è noto, hanno anche in questi composti un significato ben determinato e differente.

Solo il problema che sempre si pone è precisare a quale dei termini della coppia attribuire le singole lettere, per il che è necessaria una intesa.

E per entrare nell'argomento, che sarà oggetto di questa nota, fermiamo la nostra attenzione sugli acidi cinnamici e sui prodotti che possono essere considerati derivati da essi per sostituzione degli idrogeni nel gruppo etilenico o nel gruppo fenilico.

Degli acidi cinnamici o fenilacrilici si conoscono cinque isomeri, che sono stati raggruppati nei due tipi convenzionali — tipo trans e tipo cis —.

Al primo tipo, che chiameremo *a*, appartengono due isomeri fondenti entrambi a 133°, al secondo tipo, che chiameremo *b*, i tre isomeri fondenti a 42°, 58° e 68°.

Le formule attribuite sarebbero di accordo con la ciclizzazione che subiscono i cis convertendosi in truxone [1]), come anche con la loro sintesi dall'acido fenilpropiolico [2]).

I termini di ciascuno dei due due tipi hanno talune caratteristiche cosicchè i così detti cis *b*, a parte la loro ciclizzazione in indoni, mostrano un coefficiente maggiore di solubilità, un punto di fusione inferiore ed una minore attitudine (anzi nel caso speciale una assoluta inettitudine) di formarsi nella sintesi del PERKIN, invece una maggiore facilità di formarsi per irradiazione dei composti trans *a*, un maggiore carattere energetico, oltre ad altre differenze nei caratteri chimico-fisici, alcuni dei quali oggi richiederebbero una maggiore precisazione con mezzi più delicati.

Trascurando per il momento la molteplicità degli acidi cinnamici e limitandoci alla isomeria tipo fumarico e maleico, se i caratteri differenziali persistessero in tutte le coppie di questo tipo di stereoisomeria sarebbe facile

---

Le abbreviaziani delle opere citate sono le medesime del BEILSTEIN. Per Rendiconti R. Accademia Scienze Fisiche e Matematiche, useremo l'abbreviazione: R. A. S.

[1]) BAKUNIN: G., XXXI II (1901) 73.

[2]) PAAL e HARTMANN: B., XLII (1909) *3930*.

classificarli come *a* e come *b*. Ma vi sono eccezioni, per questo o quel carattere, come risulta dalla letteratura e come vedremo per alcuni degli acidi da noi studiati, perciò, oltre a ricorrere a reazioni di trasformazioni e propriamente a ciclizzazioni per stabilire la vicinanza spaziale di certi atomi o raggruppamenti, conviene riferirsi alla genesi di ciascuno dei termini della coppia, e ciò può essere di gran sussidio, malgrado che talvolta avvengano modificazioni strutturali, che possono indurre a conclusioni errate. Lo dimostra, ad esempio, il comportamento della coppia degli stilbeni [1]), l'uno solido f. a 124°, l'altro oleoso con p. eb. a 142°.

Infatti le due formule di costituzione

$$1)\quad \begin{array}{c} H-C-C_6H_5 \\ \| \\ H-C-C_6H_5 \end{array} \qquad\qquad 2)\quad \begin{array}{c} H-C-C_6H_5 \\ \| \\ C_6H_5-C-H \end{array}$$

sono state a volta a volta attribuite dai vari autori a ciascuno dei due stilbeni conosciuti. Il derivato bromurato dello stilbene isomero f. a 124° dà per eliminazione di HBr [2]) il tolano con maggiore facilità del derivato bromurato dell'isomero stilbene liquido: da ciò allo stilbene f. a 124° la formula 1).

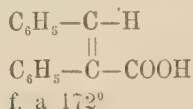
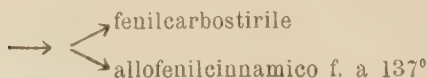
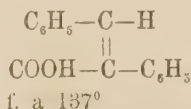
D' altro lato lo Strauss [3]) per blanda idrogenazione con alcool e Zn ramato ha ottenuto dal tolano lo stilbene liquido, mentre Aronstein e Hollemann [4]) con altri riducenti hanno ottenuto dibenzile e stilbene f. a 124°.

Lo Stoermer [1]) per risolvere la questione ricorre per la preparazione degli stilbeni all'eliminazione di CO_2 dagli acidi fenilcinnamici isomeri con p. di f. 172° e 137°, la struttura dei quali era nota [6]) e venne inoltre confermata [5]) per la formazione dell'acido *b* fenilcinnamico fondente a 137° dall'acido *b* fenilnitrocinnamico f. a 147°:

Allo-fenil o. nitrocinnamico → allo-fenilaminocinnamico →

→ ↗ fenilcarbostirile
  ↘ allofenilcinnamico f. a 137°

$$\begin{array}{c} C_6H_5-C-H \\ \| \\ C_6H_5-C-COOH \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} C_6H_5-C-H \\ \| \\ COOH-C-C_6H_5 \end{array}$$

f. a 172° — f. a 137°

a o trans f. cinnnamico
↓
stilbene liquido (cis), *b* o *iso-*

b o allo o cis f. cinnamico
↓
stilbene solido (trans), *a*, e poco liquido *b*.

---

[1]) Stoermer: A., 409 (1915) 13.

[2]) Wislicenus e Seeler: B., XXVIII (1895) 2693.

[3]) Strauss: A., 342 (1905) 190.

[4]) Hollemann e Aronstein: B., XXI (1888) 2831.

[5]) Stoermer e Heymann: B. XLV, (1912) 3099.

[6]) Bakunin: G., XXVII, II (1897) 48.

La formazione contemporanea di stilbene solido e liquido dall' acido fenilcinnamico f. a 137° è dovuta alla facilità con la quale quest'acido *b* per riscaldamento si trasforma nell' *a*.

In seguito a queste varie trasformazioni e considerazioni resta stabilito per lo stilbene f. a 124° la formula 2) e pel liquido la formula 1), che devono per le posizioni degli H legati al gruppo etilenico, dirsi il solido f. a 124° trans ed il liquido cis e derivano viceversa rispettivamente dagli acidi fenilcinnamici cis e trans.

Ora, se teniamo conto del punto di fusione più basso, della facile trasformazione termica del liquido nello stilbene a punto di fusione più alto, si deve con la nuova denominazione, conservando la formula di struttura, chiamare *b* il cis liquido ed *a* il trans stilbene f. a 124°: pur derivando il primo dall' *a* trans fenilcinnamico, il secondo dal *b* cis fenilcinnamico.

Da tutto quanto è riferito risulta chiaro che nell'attribuire le formule spaziali ai singoli termini delle coppie bisogna avvalersi e delle ciclizzazioni e della loro genesi e, per denominarli *a* e *b*, dei caratteri di solubilità, dei punti di fusione, della loro energetica, del comportamento alla irradiazione come si è detto per gli acidi cinnamici e, quando si riscontrano anomalie di qualcuna di queste proprietà, ricorrere ad analogie come si dirà ad esempio per gli acidi stereoisomeri fenil m.nitrocinnamici.

ACIDI FENILNITROCINNAMICI

La sintesi ed il comportamento delle tre coppie di acidi fenilnitrocinnamici [1]) ha permesso determinare la struttura di ciascun isomero:

$$\begin{array}{ccc} C_6H_4NO_2-C-H & \qquad & C_6H_4NO_2-C-H \\ \| & & \| \\ C_6H_5-C-COOH & & COOH-C-C_6H_5 \\ a & & b \end{array}$$

Tra le reazioni più caratteristiche sono da ricordarsi le trasformazioni dei tre isomeri *b* in fenilnitroindoni, trasformazioni che possono anche aversi partendo dagli isomeri *a* ma con difficoltà assai maggiore.

E ciò si avvera anche per la coppia dei meta, la quale come si dirà per la temperatura di fusione più elevata del *b* e per la solubilità in alcuni solventi si differenzia dalle altre due orto e para.

---

[1]) Oglialoro-Rosini: R. A. S. (1890) 44; Oglialoro-Bakunin: R. A. S. (1890) 106; Bakunin: G., XXV I (1895) 137; XXVII II (1897) 34; XXX II (1900) 340 XXXI II (1901) 73; R. A. S. (1911) 372; (1932) 20; Bakunin-Parlati: R. A. S. (1906) 18 e 503; Bakunin-Fischmann: G., XLVI 1 (1916) 77; Bakunin-Peccerillo: G., (1935) 1145; Bakunin-Vitale: G., (1933) 593; Vercillo: Atti X Cong. Int. Ch. Roma, III (1938) 375.

Tutti gli isomeri *a* si hanno con buoni rendimenti nella sintesi del PERKIN-OGLIALORO, molto più scarse le rese in *b*.

Interessava precisare le condizioni migliori per aumentare le rese degli acidi nella sintesi P. O. ed in modo speciale la resa dei *b*.

Si sono perciò istituite esperienze mutando i fattori temperatura e tempo nella attuazione della reazione P. O. e sostituendo come catalizzatori, ai sali metallici, alcune ammine.

D'altro lato, essendo in ogni caso scarse le rese degli acidi *b*, si è cercato di ottenerli per trasformazioni degli *a*, seguendo due vie:

1.°) — Riscaldamenti sotto pressione di soluzioni degli acidi o dei sali di *a*.

2.°) — Irradiazione delle soluzioni di acidi o dei sali di *a*.

Sintesi P. O. degli acidi fenilnitrocinnamici orto, meta e para.

Si sono posti a reagire in pallone di vetro a ricadere quantità equimolecolari di acido fenilacetico ed aldeidi orto-, meta- e para- nitrobenzoiche con una quantità tripla in peso di anidride acetica in presenza di sostanze che chiamiamo catalizzatrici, perchè senza di esse le reazioni non si compiono, cioè o acetato sodico o ammine terziarie a preferenza trietilammina, ciò per aver constatato che il partire da sali dell'acido fenilacetico o il partire dall'acido con un sale metallico di acido debole come l'acetato, o con una base organica terziaria, dava ugualmente buoni risultati.

I liquidi di reazione, che assumevano per raffreddamento lo stato solido ed un colore che variava a secondo della temperatura dal giallo al bruno, venivano addizionati ad acqua e bolliti e si determinava così una soluzione acetica più o meno colorata e la separazione di una sostanza solida.

Con una prima filtrazione si isolavano le acque acetiche che di solito erano più ricche nell'acido *b*, del quale si determinava la separazione per addizione di HCl.

La parte solida veniva sottoposta a purificazione sciogliendola in soluzione al 20 % di Na_2CO_3, soluzioni che assumevano un colore dal giallo al bruno a seconda della maggiore o minore quantità di sostanza resinosa, che assieme ad altri prodotti secondari rimaneva in buona parte indisciolta.

Per raffreddamento si separavano i sali sodici non puri, perciò venivano ridisciolti in acqua fredda eliminandosi così altre impurezze che restavano insolute.

Queste ultime soluzioni dei sali, come anche le acque madri del primo trattamento subivano all'occorrenza ulteriori purificazioni, dibattendole con etere etilico.

Raggiunto così un grado di purezza sufficiente, si procedeva alla precipitazione dei sali disciolti con acido acetico o cloridrico.

Bisogna qui rilevare che l'acido *b* si trovava in maggiore quantità nelle

porzioni più solubili e dalle soluzioni sodiche precipitava incompletamente con acido acetico, mentre l' acido *a* si separava al completo, ma ancora impuro di *b*.

Ciò richiedeva il ripetersi della salificazione e della precipitazione con acido acetico, riunendo le acque madri acetiche, dalle quali per aggiunta di HCl si separava l' acido isomero *b*, che si aveva sempre in uno stato di notevole purezza, dati i precedenti trattamenti.

Queste sono le operazioni sostanziali, che venivano compl tate come si dirà in seguito da altre secondarie per i vari isomeri.

Gli estratti alcalini ottenuti dalle soluzioni alcaline dibattute con etere, come le parti indisciolte in soluzioni di Na_2CO_3, contenevano o sostanze brune o sostanze rosse: in genere non si avevano aldeidi, che potessero indicare incompleta reazione e raramente acetati.

Prima di elencare le rese crediamo opportuno rilevare alcune particolarità nelle preparazioni dei singoli isomeri.

Acidi fenilortonitrocinnamici.

Per questi acidi si aveva un differente comportamento a seconda che la sintesi veniva attuata in presenza di acetato o di ammine.

Nel primo caso si aveva la formazione del fenilisatogeno [1]) insieme con sostanze rosso-brune di non determinata natura. L' isatogeno restava indisciolto parzialmente nella soluzione sodica del prodotto della reazione e se ne completava l' estrazione dibattendola con etere. Le quantità isolate si aggiravano sul 4 %.

La separazione con acido acetico ed acido cloridrico dei due isomeri è proceduta abbastanza bene, ma occorse ripetere più volte il trattamento con carbonato di sodio e le successive precipitazioni con acido acetico per isolare completamente l'isomero *a* dall'isomero *b*. L'acido *a* fonde a 196° il *b* a 147°.

Il riscaldamento fu fatto con acetato sodico, con trietilammina, con tripropilammina alle temperature di 90° e di 130°.

Usando l' acetato al disopra di 90° il prodotto della reazione si imbrunisce onde è consigliabile tenere la temperatura al disotto di 90°. Con l'ammina l' imbrunimento è assai minore e la formazione di isatogeno e prodotti rossi si è avuta solo qualche volta in scarsissima quantità: si può perciò con sicurezza riscaldare al disopra di 90°. Con tripropilammina la stabilità del sale richiede la sostituzione di idrato sodico diluito al carbonato sodico; la purificazione è penosa e induce perdite. In genere in queste sintesi è preferibile procedere a temperature relativamente basse, prolungando il tempo di riscaldamento.

Si è creduto opportuno, sia nei riguardi della separazione dei due stereo-

---

[1]) Bakunin-Vitale: R. A. S. (1927) 270.

isomeri attraverso i sali, sia allo scopo di precisare i dati riferentesi alla solubilità e all'acqua di cristallizzazione, preparare ed analizzare i sali sodici e magnesiaci. Su alcuni di essi è stato già precedentemente riferito [1].

I sali sodici furono preparati per neutralizzazione con carbonato sodico degli acidi in acqua e successiva cristallizzazione da acqua o da etere acetico poco idratato, quando la solubilità in acqua era notevole.

I sali magnesiaci furono preparati bollendo in acqua l'acido con MgO e cristallizzandoli per raffreddamento dalle soluzioni bollenti.

Sali di sodio: Isomero a

Tavolette esagonali allungate in ciuffi splendenti di colore paglino mediocremente solubili in acqua più a caldo che a freddo.

Da gr. 0,5374 perdita a 130° : gr. 0,1258 gr. 0,0928 di Na_2SO_4

	trovato	calcolato per ANa. 5 H_2O
H_2O	23,40	23,62
Na (idrato)	5,59	6,03
Na (anidro)	7,30	7,90

Isomero b

Il sale sodico dell'isomero *b* è straordinariamente solubile nè si è giunti a cristallizzarlo anche sciogliendo il sale, disseccato in stufa, in etere acetico. È di colore giallo canario.

Sali di magnesio: Isomero a

Il sale magnesiaco di questo isomero si presenta sotto forma di cristallini splendenti di color giallo paglino, del sistema triclino.

Da gr. 0,5393 gr. 0,1255 di perdita a 130° e gr. 0,0842 di $MgSO_4$.

Isomero b

È di colore più intenso dell'*a*, molto solubile, cristallini giallo paglini.

Da gr. 0,1748 gr. 0,0400 di perdita a 130° e gr. 0,0270 di $MgSO_4$.

	isomero *a*	isomero *b*	calcolato per $(A)_2Mg$. 9 H_2O
H_2O	23,27	22,88	22,43
Mg (idrato)	3,15	3,12	3,36
Mg (anidro)	4,11	4,05	4,34

[1]) Bakunin: G., XXV (1895) I 137.

Acidi fenilmetanitrocinnamici.

Per questi acidi è da rilevarsi:

che il punto di fusione del *b* è superiore al punto di fusione dell'*a*,

che la solubilità nei solventi non è notevolmente differente per i due, nel $CHCl_3$ il *b* è meno solubile dell'*a*; ma la ciclizzazione in indone essendo più facile partendo dal *b*, e formandosi questo in quantità minore dell'*a* nella sintesi, per analogia ai due isomeri orto e para, la denominazione *b* e la formula corrispondente, giustamente gli è attribuita.

Data la poca differenza di solubilità negli ordinari solventi degli acidi e dei loro sali, si hanno di solito depositi costituiti da mescolanze, nè le precipitazioni con acido acetico ed acido cloridrico valsero a determinare, come per gli altri, la separazione dei singoli isomeri. Perciò, pur avendosi una buona resa e formazione di poca sostanza bruna, risultava difficile raggiungere la purificazione così da avere nettamente i punti di fusione richiesti per i due acidi f. a 182° l'*a*, e f. a 196° il *b*.

Dopo differenti tentativi si procedette in questo modo: il prodotto della reazione separato dalle acque acetiche venne senz'altro bollito in acqua con MgO fino a soluzione totale della parte solida, ciò che, ad evitare soverchia diluizione, poteva ottenersi ripetendo i trattamenti con le acque madri dei sali cristallizzati.

Nella parte solida predomina l'acido f. a 182°, nella soluzione l'acido f. a 196°; ma, mentre dalla precipitazione della soluzione delle porzioni solide si aveva abbastanza facilmente l'acido f. a 182°, dalle acque madri si avevano ancora mescolanze.

Per ulteriore purificazione di esse si è dovuto ricorrere al trattamento con $CHCl_3$, nel quale l'isomero *a* è più solubile dell'isomero *b*.

Ad evitare la completa soluzione delle miscele con notevole consumo di solvente, per raggiungere un attacco uniforme si è preferito polverizzare in mortaio le miscele riprendendole con $CHCl_3$ bollente che discioglieva a preferenza l'*a*. La porzione meno solubile arricchitasi dell'isomero *b* veniva cristallizzata dall'alcool bollente, dal quale l'isomero *b* f. a 196° cristallizzava nei classici aghi setosi bianchi, mentre l'isomero *a* f. a 182°, se non completamente eliminato, poteva meccanicamente separarsi, perchè cristallizzava in cristalli vetrosi paglini.

Sali di sodio: Isomero a

Il sale è molto solubile in acqua per quanto vi sia una differenza di solubilità a caldo e a freddo, tanto è vero che solo per raffreddamento delle soluzioni acquose con ghiaccio si ebbero precedentemente dei cristallini con sei molecole di acqua. Avendo cercato di ottenere il sale cristallizzato da

una soluzione di etere acetico acquoso, si ebbe a temperatura ordinaria un deposito di scagliette lucenti cedrine, ma con un contenuto minimo di acqua e probabilmente miscele di sali variamente idratati.

Da gr. 0,3708 gr. 0,0360 di perdita a 130° e gr. 0,0764 di Na_2SO_4

Isomero b

Data la grande solubilità del sale sodico di questo isomero, già precedentemente constatata, si cercò di isolarlo da una soluzione di etere acetico acquosa. Si ebbe così in cristallini aghiformi giallo canario con un contenuto di tre molecole di acqua.

Da gr. 0,3718 gr. 0,0608 di perdita a 130° e gr. 0,0734 di Na_2SO_4

	isomero *a*	isomero *b*	calcolato per ANa	
			$1\frac{1}{2}$ H_2O	— 3 H_2O
H_2O	9,70	16,35	8,4	15,65
Na (idrato)	6,74	6,93	7,23	6,66
Na (anidro)	7,46	7,64	7,90	7,90

Sali di magnesio: Isomero a

Dalle soluzioni bollenti per rapido raffreddamento si depositarono cristalli setosi quasi bianchi (I).

Per abbandono delle soluzioni a riposo si ebbero dei grossi cristalli vetrosi prismatici paglini (II), appartenenti al sistema monoclino.

(I) Da gr. 0,2150 gr. 0,0616 di perdita a 130° e gr. 0,0392 di $MgSO_4$

(II) Da gr. 0.0545 gr. 0,0077 di perdita a 130° e gr. 0.0098 di $MgSO_4$

Isomero b

Le soluzioni dell'isomero *b* dettero per raffreddamento dei cristalli vetrosi bianchi che si opacano facilmente.

Da gr. 0,2570 gr. 0,0810 di perdita a 130° e gr. 0,0370 di $MgSO_4$

	isomero *a*			isomero *b*		calcolato per $(A)_2Mg$		
	I	II				11 H_2O	5 H_2O	14 H_2O
H_2O	26,36	14,12	:	31,51	:	26,11	13,83	31,02
Mg (idrato)	3,23	3,63	:	3,16	:	3,27	3,77	2,99
Mg (anidro)	4,38	4,22	:	4,62	:	4,34	4,34	4,34

Acidi fenilparanitrocinnamici.

La separazione dei due acidi non riesce difficile, data la notevole differenza di solubilità dei due isomeri. Per trattamento con acqua del prodotto della reazione si ha già nella soluzione acetica parecchio isomero fondente

a bassa temperatura che, sia per raffreddamento sia per precipitazione con HCl, può isolarsi. Con successivi trattamenti acquosi si elimina ancora acido fondente a bassa temperatura. Oppure, qualora si preferisca trasformare il prodotto della reazione in sale sodico, si tiene conto del fatto che il sale dell'isomero *b* è più solubile di quello dell'isomero *a* e quindi nelle acque madri dei vari trattamenti si accumula l'isomero *b*.

E così si operò.

Come risulta dalla tabella III si attuò la sintesi con acetato, trietilammina e tripropilammina. La tripropilammina, difficilmente spostabile, richiese l'uso di soluzioni di idrossido di sodio diluito.

Non tutti i dati sono riportati perchè andarono perduti nell'incendio, nè si potettero ripetere quelli con trietilammina per la mancanza di tale prodotto. Ma ricordiamo che insistendo nel riscaldamento con trietilammina a 130° si ebbero rese al disopra del 90 % con un contenuto di isomero *b* che raggiungeva il 40 %, ciò che dimostra che le rese maggiori sono dovute ad una più completa reazione.

L'isomero *a* fonde a 214°, il *b* a 143° quando si secca in stufa, giacchè esso cristallizza con molecole del solvente usato, che perde per riscaldamento. Nella determinazione del punto di fusione sulla sostanza idrata si ha un'indicazione di temperatura che si aggira sui 100°, ma che varia a seconda che il tubicino si immerge nel liquido riscaldante o a temperatura ambiente o verso i 100°: nel secondo caso la temperatura di fusione è 95-105°, nel primo invece, evidentemente perchè perde in precedenza dell'acqua, verso i 118°. Nell'un caso e nell'altro si rapprende in una massa solida gialla, che fonde di nuovo, se ulteriormente riscaldata, a 143°, ed è questo il punto di fusione che sogliamo indicare come caratteristico dell'isomero *b* del para.

Sali di sodio: Isomero a

Dalle soluzioni acquose bollenti cristallizzava per raffreddamento il sale in aghi setacei di color giallo canario, simili a quelli preparati precedentemente, che contenevano 4 H_2O.

Da gr. 0,4215 gr. 0,0848 di perdita a 130° e gr. 0,0753 di Na_2SO_4.

Isomero b

Data la notevole solubilità in acqua si trattò la massa salificata con etere acetico lievemente idratato. Si ebbero così due porzioni, di cui una soluta in etere acetico e cristallizzata dal medesimo in aghi di colore giallo canario più intenso che per l'isomero *a* (I).

Nella porzione non soluta, da considerarsi quale un prodotto di disidratazione del sale precedente, si ebbe una massa polverosa sempre gialla (II).

(I) Da gr. 0,3106 gr. 0,0494 di perdita a 130° e gr. 0,0618 di Na_2SO_4

(II) Da gr. 0,3002 gr. 0,0026 di perdita a 130° e gr. 0,0670 di Na_2SO_4

	isomero *a*	isomero *b*		calcolato per ANa	
		I	II	4 H_2O	3 H_2O
H_2O :	20,18 :	15,90	0,8 :	19,83	15,65 :
Na (idrato) :	5,78 :	6,44	7,22 :	6,33	6,66 :
Na (anidro) :	7,25 :	7,66	7,29 :	7,90	7,90 :

Sali di magnesio: Isomero a

Dalle soluzioni acquose bollenti si separano degli aghetti setosi di color giallo cedrino assai chiaro.

Da gr. 0,2352 gr. 0,0606 di perdita a 130° e gr. 0,0374 di $MgSO_4$

Isomero b

Per questo sale si osservò un fatto caratteristico.

In genere tra i sali dei due isomeri *a* e *b* si rileva sempre una colorazione più intensa nei secondi.

Per questo isomero *b* si ebbero sali intensamente colorati e sali incolori come più chiaramente appare da quanto si espone.

Dalle soluzioni magnesiache concentrate si depositavano per raffreddamento dei cristalli di un giallo arancio, colore che ricorda quello del dicromato potassico, con splendore vitreo, di differenti dimensioni, misti a polvere cristallina bianca.

Studiato esattamente il meccanismo di formazione di questi sali differentemente colorati si osservò:

che per lenta evaparazione su bagnomaria, cioè tenendo i liquidi ad una temperatura superiore a quella ambiente, si andavano man mano depositando alla superficie del liquido evaporante degli ammassi di cristallini bianco matti misti a quelli arancioni vetrosi, che si depositavano gradatamente nel fondo del beker.

Se invece si lasciavano i liquidi a spontanea evaporazione a temperatura ambiente, si andavano man mano formando dei cristalli triclini di differenti dimensioni a secondo della concentrazione delle soluzioni, tutti caratterizzati da un colore giallo-arancio intenso. Spesso i due tipi di cristalli si trovavano mescolati.

Oltre questi due tipi di cristalli, abbandonando le soluzioni diluite a sè stesse a temperatura ambiente, si ebbero dei cristalli laminari allungati con splendore micaceo.

Questi differenti cristalli analizzati ed esaminati accuratamente erano caratterizzati dalle seguenti proprietà:

i bianchi paglini matti potevano considerarsi anidri; i giallo arancio, di qualunque dimensione, idratati con cinque molecole di acqua; i cristalli allungati micacei con sette molecole di acqua. I giallo arancio, per azione

dell' alcool, si disidratavano perdendo il loro colore; per riscaldamento si decoloravano ugualmente senza raggiungere il colore bianco di quelli anidri ottenuti a temperatura più alta. La perdita di acqua fu constatata determinando il contenuto in acqua dei sali sottoposti a trattamento alcoolico ed all' azione termica.

Il comportamento di questo sale magnesiaco ricorda molto quello del solfato di rame idrato ed anidro.

I cristalli micacei, pur contenendo maggiore quantità di acqua di cristallizzazione, sono incolori.

L' acido che si riottiene dai singoli sali è sempre lo stesso acido *b* fondente a 143°, con tutte le caratteristiche altrove riportate.

Si tratta perciò sempre di modificazioni indotte dall' acqua di cristallizzazione nel sale e non di differenza dell' acido.

(I) Da gr. 0,2715 di sale setoso giallo arancione gr. 0,0382 di perdita a 130° e gr. 0,0461 di $MgSO_4$.

(II) Da gr. 0,2029 di sale arancione in grossi cristalli g. 0,0284 di perdita a 130° e gr. 0,0345 di $MgSO_4$.

(III) Da gr. 0,4288 di sale arancione in cristallini medi gr. 0,0608 di perdita a 130° e gr. 0,0770 di $MgSO_4$.

(IV) Da gr. 0,1940 di sale in cristallini bianco matti gr. 0,0110 di perdita a 130° e gr. 0,0423 di $MgSO_4$.

(V) Da gr. 0,1644 di sale in lamine micacee incolori gr. 0,0308 di perdita a 130° e gr. 0,0284 di $MgSO_4$.

	isomero *a*	isomero *b*				
		I	II	III	IV	V
H_2O	25,76 :	14,07	13,97	14,17	0,3	18,73 :
Mg (idrato)	3,21 :	3,43	3,43	3,62	4,4	3,48 :
Mg (anidro)	4,32 :	3,98	3,99	4,29	4,6	4,21 :

calcolato per $(A)_2Mg$

	11 H_2O	5 H_2O	7 H_2O
H_2O	26,11	13,85	18,35
Mg idrato	3,27	3,77	3,55
Mg anidro	4,34	4,34	4,34

Sulle curve di solubilità dei varii sali, sono in corso esperienze.

Le tabelle seguenti (I, II e III) contengono i dati relativi ai rendimenti ottenuti, per i vari acidi, in diverse condizioni di esperienza e con differenti catalizzatori.

TABELLA I.

Sintesi degli acidi fenilortonitrocinnamici.

N. d' ord.	Aldeide impieg.	Temper.	Tempo in ore	Catalizzatore	resa *a* %	resa *b* %	resa comples. %
1°	50	90°	12	acetato sodico	48,98	3,26	52,24
2°	50	130°	12	» »	56,06	1,46	57,52
3°	50	90°	30	» »	61,68	2,02	63,70
4° [1]	50	90°	30	» »	55.62	4,16	59,78
5°	50	90°	12	trietilammina	60,65	11,14	71,79
6°	25	130°	12	» »	43,16	17,90	61,06
7°	25	90°	12	tripropilammina	75,79	3,32	79,11
8°	25	130°	12	» »	59,31	8,47	67,78

[1]) Con corrente di CO_2.

Osservazioni. — Con acetato a 90° sostanze rosse con isatogeno, a 130° notevole imbrunimento e alterazione dell'isatogeno. Con acetato a 90° maggiori quantità di isomero *b* e poco differenti le rese in *a*; con la corrente di CO_2, un aumento di resa in *b*.

Con trietilammina e tripropilammina scarsissima sostanza rossa, a 130° sempre imbrunimento. Maggiori rese che con l'acetato, sopratutto per l'isomero *b*. Mancano dati per la trietilammina, andati perduti nell'incendio, con rese maggiori in *b* variando il tempo, il cui prolungamento contribuisce a completare la reazione. La purificazione con tripropilammina è difficile e determina perdite. Da consigliarsi: lo scaldamento a 80°-90° con acetato, a 90°-110° con trietilammina. Tempo medio 12 ore.

TABELLA II.

Sintesi degli acidi fenilmetanitrocinnamici.

N. d' ord.	Aldeide impieg.	Temper.	Tempo in ore	Catalizzatore	resa *a* %	resa *b* %	resa comples. %
1°	50	100°	20	acetato sodico	63,25	15,00	78,25
2°	50	140°	20	» »	73,46	20,34	93,8
3°	25	90°	12	» »	72,2	16,2	88,4
4°	25	130°	12	» »	72,2	19,37	91,57
5°	25	100°	30	trietilammina	62	32	94
6°	25	130°	12	» »	60	33	93
7°	25	150°	12	» »	50	32	82
8°	25	130°	12	» »	55	29,5	84,5

Osservazioni. — Rese soddisfacenti con acetato e trietilammina, con quest'ultima maggiori rese in *b*. Da consigliarsi la temperatura di 100°-120° e la durata di 12 ore.

TABELLA III.

Sintesi degli acidi fenilparanitrocinnamici.

N. d'ord.	Aldeide impieg.	Temper.	Tempo in ore	Catalizzatore	resa *a* %	resa *b* %	resa comples. %
1°	20	100°	20	acetato sodico	68,25	17,01	85,26
2°	20	140°	20	» »	66,01	25	91,01
3°	25	130°	12	» »	76,10	19,1	95,2
4°	20	100°	20	trietilammina	74,16	19,38	93,54
5°	20	140°	20	» »	73,51	23,21	96,90
6°	25	90°	12	tripropilammina	70,32	20,51	90,83
7°	25	130°	12	» »	52,77	36,4	89,17

Osservazioni. — La formazione di sostanze brune è scarsa anche a elevate temperature, con l'aumentare della stessa e del tempo aumenta la resa nell'isomero *b*. Per la trietilammina mancano dati andati perduti nell'incendio con rese maggiori, insistendo sul riscaldamento verso i 130°. Si consiglia operare a 100°-120° con riscaldamento medio di 12 ore.

TRASFORMAZIONE DEGLI ACIDI *a* IN *b* E VICEVERSA.

Con la sua classica memoria « *Über die raümliche Anordnung der Atome in organischen Moleküle* », J. WISLICENUS [1]) basandosi sull'ipotesi del vant'HOFF dette una attraente spiegazione delle trasposizioni, che si possono attuare nei derivati etilenici *a* (trans) $\rightleftarrows$ *b* (cis).

La sua teoria si fondava sulla formazione di prodotti intermediari di addizione (saturi) per azione dei differenti reagenti sui non saturi etilenici, così da rendere possibile la rotazione dei due atomi di carbonio non più legati da due valenze ed il cambiamento della posizione relativa dei gruppi ad essi uniti. La successiva eliminazione degli atomi o degli aggruppamenti di atomi addizionatisi reintegrava il composto non saturo, nel quale la disposizione relativa dei differenti gruppi o atomi legati ai carboni etilenici era diversa. Si spiegavano così in modo brillante le trasformazioni dei composti *a* nei composti *b* o viceversa.

A. MICHAEL [2]), nella sua critica alla dissertazione di WISLICENUS, attaccò

[1]) Abhandlung der K. Sachs Gesellschaft des Wiss. — 1887.

[2]) J. pr. 38 (1888) 6.

violentemente la ipotesi, asserendo che i composti intermediari accertati mostravano, nelle condizioni delle esperienze, una tale stabilità da non giustificarne un' ulteriore trasformazione. Questo dibattito fu continuato da ANSCHÜTZ, FITTIG ed altri e infine Zd. H. SKRAUP [1]), pur ammettendo la formazione di composti di addizione, formulò la sua teoria sulla risonanza, affermando che in alcuni processi chimici si determinano tra gli atomi oscillazioni atte a provocarne altre in molecole, che partecipano a differenti processi chimici collaterali. Queste ultime oscillazioni sia per sè stesse, sia intensificate da altre oscillazioni, per esempio termiche, sono quelle che possono determinare una totale modificazione nella struttura.

Così ad esempio la catalisi del processo di trasformazione acido maleico→fumarico sarebbe determinata dalla formazione di prodotti di addizione dell' acido non saturo, i così detti prodotti intermediari, non perchè essi ulteriormente si trasformino, ma perchè le oscillazioni, che tale processo induce, provocano altre oscillazioni nella molecola dell' acido maleico, per le quali si otterrebbe la trasposizione maleico→fumarico.

Le stesse trasposizioni possono essere provocate per le medesime ragioni da processi di differente natura per esempio: la concomitante reazione tra H_2S e SO_2, in una soluzione di acido maleico, pur essendo inerti isolatamente i singoli termini H_2S e SO_2, nonchè il prodotto della reazione.

Si osserva che la trasformazione inversa fumarico-maleico a 170° in soluzione acquosa non si avvera, per lo meno in misura apprezzabile, pur avendosi, per quanto più difficilmente, acido malico.

In ogni modo è bene tener presente che, qualunque sia l' agente che acceleri la trasposizione, bisogna considerare le molecole dei composti in uno stato non statico, ma dinamico ed i legami atti ad allentarsi a tal punto da realizzare nelle molecole complesse dei corpi organici quello, che si realizza nelle molecole degli elementi allo stato nascente.

Le energie che possono contribuire a rendere, in tale senso, atti ad entrare in reazione i doppi legami, possono essere sia la termica, sia la luminosa e la presenza di sostanze che, o per il loro stato fisico o per le reazioni che provocano, possono avere una favorevole influenza.

In genere è stato constatato che uno dei due termini sotto l' azione di speciali agenti, sopratutto la luce, si trasforma più facilmente nell' altro e che di solito questo si osserva per quegli isomeri, che hanno le caratteristiche ricordate per gli *a*. Questi sono considerati stabili nelle ordinarie condizioni; ma sulla stabilità o meno di tali composti è difficile pronunciarsi, apparendo ciascuno di essi egualmente stabile e potendosi, mutando le condizioni, avere vere reazioni di equilibrio con trasformazione vicendevole dei due termini.

---

[1]) M. XII (1891) 107.

Azione concomitante di SO_2 e H_2S.

Una delle reazioni sperimentate dallo SKRAUP per la trasformazione dell'acido maleico nel fumarico è stata quella che si ha facendo gorgogliare in una soluzione di acido maleico una corrente di H_2S e di SO_2. Lo SKRAUP osservò un aumento di temperatura e la formazione dell'acido fumarico poco solubile.

Avendo ripetuto queste esperienze su soluzioni acquose-alcoliche delle tre coppie di acidi fenilnitro-cinnamici, pur avendo constatato la elevazione di temperatura a circa 40°, non si rintracciò lo stereisomero dell' acido messo a reagire.

Trasformazione per azione termica sotto pressione.

in collaborazione col Dott. **Ettore Vitale**

I tentativi per ottenere la trasformazione degli *a* in *b*, che è quella che ci interessa, per azione del calore, furono fatti sottoponendo soluzioni degli acidi a temperatura differente sotto pressione.

L' apparecchio utilizzato a tale scopo era costituito da un cilindro di acciaio inossidabile al vanadio di notevole spessore che poteva essere ermeticamente chiuso con un blocco anche di acciaio. Nel cilindro poteva collocarsi un tubo di vetro coassiale con apertura chiusa con lana di vetro così da funzionare come apparecchio a ricadere. Il cilindro di acciaio veniva immerso in un altro cilindro contenente olio, che veniva riscaldato con fiamma. Il cilindro interno ermeticamente chiuso era provvisto di termometro e manometro, così da poter misurare temperatura e pressione. Si è preferito misurare la temperatura esterna del bagno considerando raggiunto l'equilibrio termico con l'interno, quando il manometro mostrava una certa stabilità.

Molti saggi furono fatti: essi sono riportati in gruppi come risulta da quanto si riferisce.

Acido f. o. n. cinnamico f. 196°.

Per l' acido orto f. a 196° si sperimentarono tanto le soluzioni acquose dei sali, quanto soluzioni degli acidi in solventi neutri. A temperature inferiori a 250°, non si ebbero trasformazioni di rilievo; a temperatura superiore i sali sodici si trasformarono al completo in 3-diossifenilindolo [1]), trasformazione dovuta alla idrolisi del sale ed alla presenza di soda. Si potrebbe affermare che l' acido *a* trasformatosi in *b* si ciclizzi.

Il tempo non ebbe grande influenza. Bastava un riscaldamento di un paio d' ore. Temperature superiori a 250° sono da evitarsi, perchè si deter-

[1]) BAKUNIN-PECCERILLO: G., LXIII I (1933) 3.

minano processi secondari con distruzione dell' acido in esame. Anche sostituendo al sale sodico, sali di litio e di bario o aggiungendo all' acido libero in acqua dietil o trietilammina, chinolina, piridina, si ebbe la formazione di 3-diossifenilindolo, quantità differenti di acidi immodificati e prodotti bruni.

Ad evitare l' azione degli alcali si è proceduto sull' acido in soluzione cloroformica: da solo non subiva trasformazioni.

Con cloroformio e anidride fosforica la trasformazione in fenilortonitroindone si avvera, solo non è consigliabile per la preparazione di quest' ultimo composto, perchè l' anidride fosforica tende ad ammassarsi nel fondo del tubo di vetro e quindi non vi è sufficiente contatto [1]) tra la sostanza disidratante e l' acido.

La trasformazione dell' acido f. o. n. cinnamico f. a 196° in fenilnitroindone, ammesse le formule spaziali prescelte, richiederebbe la precedente trasformazione dell' acide *a* in acido *b*.

Ora è stato già detto altrove [2]) che, nella ciclizzazione dogli acidi fenilnitrocinnamici *a* meta e para, non si è mai trovata anidride dell' acido *b*, anche quando la disidratazione non era completa; ma sempre acido *a* primitivo, anidride dell' acido *a* e f.nitroindone.

Lo stesso si avvera per l' acido f.orto nitro cinnamico *a*; esso finisce per ciclizzarsi nell' identico indone, che si ottiene con maggiore facilità dal *b*; ma l' anidride che lo accompagna partendo da acido *a* e sempre la nota anidride f. a 127°, anche se, per incompleta disidratazione, vi sia ancora acido non trasformato; mentre partendo dall' acido *b* si ritrova l' anidride f. a 151° cristallizzata dall' alcool in fini aghetti e che analizzata dette percentuali di H_2O e CO_2 richieste dalla teoria per $(C_{15}H_{10}NO_3)_2O$.

Una sola volta, nelle esperienze eseguite sotto pressione col Dr. Ettore Vitale, avendo messo a reagire la soluzione cloroformica dell' acido (2 gr.) con quantità non grande di P_2O_5, alla temperatura di 150°, nell' apparecchio descritto senza tubo di vetro, si ebbe per evaporazione completa del solvente filtrato una miscella costituita da fenilortonitroindone in quantità minima e da anidride f. a 151°, cioè da anidride dell' acido *b*. La separazione era facile perchè con trattamento scarso di cloroformio si eliminava la maggior parte dell' indone; la polvere bianca residua non era che l' anidride f. a 151°. Oppure bollendo tutto il prodotto della reazione con $Ba(OH)_2$ l' indone restava immutato e l' anidride si idratava trasformandosi nell' acido *b* f. a 147°. Questo risultato, che avrebbe costituito un comodo metodo di trasformazione di *a* in *b*, non si ebbe ulteriormente.

Altri saggi eseguiti nell' apparecchio descritto con o senza tubo interno di vetro su quantità uguali, maggiori o minori dell' acido *a* con riscalda-

---

[1]) Bakunin: G., XXX II (1900) 340.

[2]) Bakunin-Parlati: R. A. S. (1906) 503.

mento a temperatura uguale o differente, con addizione di differenti metalli (data la natura metallica della bombola), con quantità variabili di P_2O_5, dettero sempre piccole quantità di acido *b*, fenilnitroindone, acido *a* immodificato e anidride corrispondente f. a 127° in proporzioni variabili, ma mai più l'anidride f. a 151°.

Avendo sostituito al $CHCl_3$ il solvente mescolato a quantità variabili di $COCl_2$ e di HCl, prodotti di decomposizione del cloroformio stesso, si ebbero piccole quantità di acido *b*; ma mai, come nel saggio indicato, la trasformazione completa.

Sostituendo al cloroformio altri solventi, come toluolo, etere acetico, alcool, si ebbero solo tracce di acido *b* e etere etilico di acido *a* nel caso dell'alcool. L'addizione di iodio, sempre in soluzione cloroformica, a 150°, a 200° e 250° ha determinato un piccolo aumento della resa dell'acido *b*, che raggiunge il 10 e il 15 %. Con addizione di anilina in $CHCl_3$ si ebbero piccole quantità di acido *b*.

Il ricorrere ad elevata temperatura non pare metodo consigliabile per la piccola quantità di acido *b*, che si ottiene spesso con perdita dell'acido *a* messo a reagire e che non si ritrova allo stato primitivo.

Si ricorda che per l'anidride dell'acido *a* fu dato a suo tempo il punto di fusione 116°, che per successive cristallizzazioni si eleva a 127° [1]).

Acido fenilmetanitrocinnamico f. 182°.

L'acido fenilmetanitrocinnamico f. 181-2° è stato sottoposto al riscaldamento sia allo stato di sale di sodio, di litio, di ammine organiche, sia allo stato di acido o di etere metilico in soluzione cloroformica.

Le porzioni sperimentate si aggiravano sui 2 gr., il tempo sulle due ore, la temperatura sui 250°.

Gli acidi ricavati dopo il riscaldamento erano sempre costituiti da miscellanee fondenti attorno ai 165°.

L'isolamento degli isomeri, come si è detto, è difficile e su quantità piccole incompleto. Le porzioni di acido f. a 195°, isolate, raggiungevano al massimo il 7 %.

Migliori risultati si ebbero riscaldando la soluzione acquosa del sale sodico, meno buoni risultati dallo scaldamento dell'acido con trietilammina in $CHCl_3$, dell'etere etilico dell'acido in $CHCl_3$ e dell'acido libero con piccole quantità di P_2O_5 in $CHCl_3$.

Acido fenilparanitrocinnamico f. 214°.

Meglio degli altri due isomeri orto e meta si comporta l'acido fenilparanitrocinnamico f. a 214° nella sua trasformazione nello stereoisomero f. a 143°.

---

[1]) Bakunin-Parlati: R. A. S. (1906) 18.

Non si ebbe l'inconveniente osservato nell'orto che, come si è detto, ciclizza nel 3-diossifenilindolo, nè si mostrò poco trasformabile, come l'isomero meta per il quale si avevano anche difficoltà nella separazione dei due stereoisomeri.

Il sale di sodio dell'acido f. a 214°, che per la sua solubilità è difficile a purificarsi, se impuro per alcalinità tendeva ad assumere un colore rossiccio per la formazione di altro corpo non ancora identificato.

Perciò fu preferibile partire dal sale di litio col quale non si osserva formazione di sostanza rossiccia. Si ebbe così, alla temperatura di 250° e partendo da due grammi di acido allo stato di sale di litio sciolto in acqua, in un tempo di circa due ore, una trasformazione dell'acido f. a 214° in quello f. a 143° pel 50 %.

Risultati meno buoni si ebbero col sale di bario in acqua, con la trietilammina in acqua, con l'acido in $CHCl_3$ per quanto sempre si ebbe una certa quantità dell'isomero f. a 143°.

Con l'ossido di alluminio in acqua a 250° si ebbe una trasformazione del 40 %.

Conclusioni. — Dall'assieme di queste ricerche risulta che l'acido f. o. nitrocinnamico f. a 195° in soluzioni acquose alcaline per azione del calore si ciclizza nel 3-diossifenilindolo. Allo stato di acido in solventi neutri, come il $CHCl_3$, toluolo, etere acetico, alcool, la trasformazione pare mancare ed essere solo accentuata dalla presenza di talune sostanze, come Iodio, $COCl_2$, HCl, P_2O_5. Quest'ultimo, determinando la ciclizzazione in f. o. nitroindone, non dette nelle condizioni ordinarie l'acido f. a 147° o la sua anidride f. a 151°, meno per quest'ultima una sola volta, come è stato riferito ampiamente nella trattazione speciale.

L'acido f. m. nitrocinnamico si mostra alquanto torpido ed in quantità relativamente scarsa l'isomero f. a 181° si trasforma in quello f. a 195° sia allo stato di sale, sia allo stato di acido in solvente neutro.

Il riscaldamento delle soluzioni dei sali e dell'acido libero dello stereoisomero f. p. nitrocinnamico *a* f. a 214° determina in quantità discrete la sua trasformazione nell'isomero *b* f. a 143°. I migliori risultati si ebbero usando il sale di litio.

In ogni modo come metodo di preparazione dell'isomero *b* il riscaldamento non è consigliabile per le scarse rese e le complicazioni che si determinano per ragioni varie.

Effetti della irradiazione sugli acidi cinnamici e sui loro derivati.

L'azione del sole e l'azione della luce delle lampade a mercurio è stata largamente sperimentata sugli acidi cinnamici. Data la grande analogia di struttura di essi e degli acidi fenilnitrocinnamici ci è parso conveniente

stabilire un parallelo tra il comportamento di questi due gruppi di acidi alla irradiazione.

Esporremo il più concisamente possibile quanto è riferito in letteratura: frutto di molte ma spesso non coordinate esperienze.

Le scuole che in modo speciale si sono occupate di questi acidi sono quelle di LIEBERMANN, di BILMANN, di STOBBE, di STOERMER, di DE JONG, di MEYER, di EISENLOHR, di WEYGAND e altri singoli.

Per quanto nelle memorie si ritrovi di solito particolareggiatamente discussa la letteratura precedente e molto sia riferito nel BEILSTEIN, crediamo opportuno richiamare alcuni dei più interessanti o più recenti lavori.

Tra le principali caratteristiche degli acidi cinnamici vi è quella di presentarsi non nelle due sole forme corrispondenti alle così dette strutture « trans » *a* e « cis » *b*; ma anche in molteplici altre che si raggruppano in ciascuna di queste due serie e sulle quali è tuttora vivace il dibattito, se attribuirle ad isomerie chimiche o a polimorfismo.

Riservandoci di ritornare in altra nota su questo argomento, enumeriamo solo queste diverse forme: un acido f. a 133° monoclino stabile ed un acido anche f. a 133° anch'esso monoclino differenziantesi dal primo per forma cristallina e solubilità [1]) entrambi ritenuti trans *a*; un acido f. a 68° allocinnamico e uno f. a 58° isocinnamico entrambi trovati la prima volta dal LIEBERMANN nei prodotti secondari della coca ed infine un acido f. a 42°, l'isocinnamico dell'ERLENMEYER senior, nel quale i primi due per azione termica si trasformano [2]).

Questi tre ultimi anch'essi monoclini prismatici, sono ritenuti di struttura « cis » *b*.

Vi sarebbero poi un'altro acido instabile fusibile a 32°, che si ottiene per forte raffreddamento assieme al prodotto fondente a 42° [3]), ed un'altro acido trans f. verso 130°, triclino di purezza dubbia.

Nella sintesi del PERKIN non si isolano acidi della serie cis e bisogna ricorrere ad altre sintesi: all'etere dell'acido benzalmalonico, alla riduzione in determinate condizioni dell'acido fenilpropiolico, all'azione della luce sui trans. Ciascun termine della stessa o delle due serie si trasforma negli altri in varie guise: per azione termica, per azione della luce, per innescamento delle soluzioni, delle masse fuse o anche delle masse solide.

Soffermandoci per quel che ci riguarda sulle irradiazioni dei vari acidi, ancora complicazioni si presentano nelle esperienze, perchè gli acidi cinnamici irradiati sono atti sia a subire l'isomerizzazione, cioè la trasformazione di un monomero in un altro, sia la polimerizzazione.

---

[1]) E. ERLENMEYER jun.: B., XLII (1909) 502.

[2]) STOBBE e SCHÖNBURG: A., 402 (1914) 187.

[3]) WEYGAND e BAUMGÄRTEL: B., LXV (1932) 6933.

Lo stato di aggregazione contribuirebbe a determinare in prevalenza l'una o l'altra delle modificazioni.

Per polimerizzazione si formano i così detti acidi truxillici, ai quali si attribuisce una formula dimera. Questi acidi sono elencati con i vecchi e nuovi nomi da DE JONG [1]). Secondo la nuova denominazione i truxillici sarebbero dimeri del trans e i truxinici dei « cis ». Si è raggiunto un numero di 11 isomeri, in parte ottenuti direttamente per azione della luce sui monomeri, in parte trovati in prodotti naturali, in parte dovuti a trasformazione dei dimeri per azione termica in presenza di sostanze varie.

Di questi polimeri, della loro formazione, della loro scissione, della loro struttura si sono largamente occupati lo STOBBE e collaboratori, lo STOERMER e collaboratori, il DE JONG in una serie di memorie apparse nei volumi del BERICHTE (52, 54, 55, 56, 57, 58, 64 e 68 II).

Le ipotesi fatte sulla struttura spaziale di detti dimeri, con i gruppi C_6H_5. COOH, in piani differenti, spiegherebbe l'esistenza dei numerosi isomeri.

L'influenza dello stato di aggregazione sarebbe tale che l'irradiazione sugli acidi allo stato solido determinerebbe in prevalenza la polimerizzazione, mentre sugli acidi fusi o in soluzione, in prevalenza l'isomerizzazione.

Infatti lo STOBBE [2]) per lunga esposizione alla luce diffusa nell'acido f. a 42° solido ottenne acido β truxinico, cioè un polimero del « cis »; mentre per irradiazione al sole di luglio, che determina la fusione dei tre acidi fondenti a 42°, 58°, 68°, si ha la trasformazione del 58° e 68° nel 42° e parziale polimerizzazione negli acidi α truxillico e β truxinico, cioè in dimeri del « trans » e del « cis » cinnamico.

DE JONG [3]), che operava a Buitenzorg ai tropici, anche utilizzando per l'irradiazione al sole le ore fresche del mattino, ottenne sempre la isomerizzazione dell'acido f. a 42° nel trans e contemporanea formazione degli acidi α-truxillico e β-truxinico, forse per la maggiore ricchezza della luce tropicale in radiazioni ultraviolette.

Le irradiazioni dell'acido cinnamico fondente a 133° solido dà solo acido truxillico.

STOERMER e FOERSTER [4]) oltre ad avere i polimeri, per irradiazione con lampada o al sole dall'acido allocinnamico, constatano una depolimerizzazione nella soluzione dei sali solidi degli acidi α truxillici e β truxinici nei rispettivi monomeri « trans » e « cis ».

Il problema dell'influenza del mutamento di stato da solido a liquido durante l'irradiazione è stato in modo speciale considerato da STOBBE e

[1]) B. LVI (1923) 818.

[2]) B. LII (1919) 666.

[3]) R. 31 (1912) 262.

[4]) B. LII (1919) 1255.

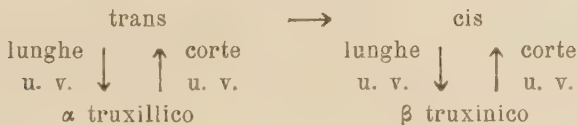
Steimberger [1]) usando luci filtrate attraverso recipienti di quarzo, vetro uviol e vetro comune, contenenti soluzioni benzoliche di « trans » irradiate da una lampada a mercurio; essi constatano che l'azione più intensa è esercitata da raggi da 270 a 320 μμ. per quanto anche le onde più corte al disotto di 270 μμ e quelle più lunghe al disopra di 320 μμ esercitino una certa azione, trasformando l'acido isomero « trans » nel « cis ».

Dall'acido cinnamico « cis » allo stato solido, per azione della lampada si ha una isomerizzazione nel trans e formazione di poco acido β truxinico.

L'azione della medesima lampada sul « cis » fuso, e quindi allo stato liquido, ha dato isomerizzazione notevole nel trans e nessuna polimerizzazione. Invece all'azione del sole l'acido cinnamico « cis » solido si isomerizza notevolmente nel « trans » e si polimerizza nell'acido β truxinico; ed il trans anche allo stato solido si polimerizza quasi tutto nell'α truxillico. Piccole quantità di acido β truxinico si ritrovavano.

Alla luce solare l'acido « cis » in sospensione in acqua acidificaia con HCl si isomerizza nel « trans » e si dimerizza prevalentemente in β truxinico. Invece, se si sottopongono alla irradiazione con la luce solare delle mescolanze di trans e di cis, sospese sempre in acqua, la quantità di α truxillico che si accompagna al β truxinico è maggiore.

Da quanto esposto si deduce che lo stato di aggregazione ha una notevole influenza nelle isomerizzazioni e polimerizzazioni, ma non si ha in genere esclusivamente l'una o l'altra e isomerizzazioni e polimerizzazioni finiscono per susseguirsi ed influenzarsi a vicenda. Lo stato di aggregazione non solo, ma le lunghezze di onda hanno influenza sulla qualità e quantità dei prodotti della trasformazione.

Il seguente schema dà un idea di esse [2]):

e mostra come si possa avere non solo la polimerizzazione, ma la depolimerizzazione dei dimeri. Le esperienze furono fatte sull'α truxillico e β truxinico, in tubi di quarzo, vetro uviol e vetro comune, solidi, in soluzione benzenica, e sui sali sodici in soluzioni acquose.

Le due forme del trans cinnamico f. a 133°, α e β, si isomerizzano con velocità diversa, maggiore pel β, che dà più facilmente il « cis », che a sua volta si polimerizza nel β truxinico: ecco perchè dal β « trans » si ha maggiore quantità di β truxinico.

[1]) B. LV (1922) 2225.

[2]) Stobbe e Lehfeldt: B., LVIII (1925) 2415.

È interessante constatare l'influenza che i gruppi o atomi sostituenti gli atomi di H hanno sul comportamento di questo tipo di composti alla irradiazione [1]) sopratutto nei riguardi della polimerizzazione.

I sali, gli eteri, le ammidi si convertono in modo simile in dimeri e qualche volta in polimeri superiori. Se i sostituenti nel nucleo sono un OH o un OCH_3 si hanno comportamenti analoghi salvo qualche eccezione. I gruppi NO_2 sembrano invece avere azione inibitrice e azione inibitrice hanno i sostituenti in α: CH_3, C_2H_5, C_6H_5, COOH, CN ed altri con qualche eccezione per influenza contemporanea di altri sostituenti nel nucleo; non si polimerizza il β fenilcinnamico, invece si polimerizza il β metilcinnamico.

L'α bromocinnamico dopo lunga irradiazione alla lampada e al sole [2]) non si polimerizza forse perchè si altera.

L'aldeide dell'acido cinnamico si trasforma in un tetramero, mentre l'anidride del «cis» si isomerizza all'oscuro nell'anidride del trans e non si polimerizza in un'anidride del β truxinico.

Nella polimerizzazione dello stirolo [3]) sia per azione fotochimica, sia per azione termica, l'azione fotochimica ha una influenza sulla polimerizzazione anche quando, cessata l'azione della luce della lampada a mercurio, si attui l'azione termica. Si constata così che preparati esposti precedentemente alla luce si polimerizzano più facilmente di quanto non avvenga per quelli non precedentemente esposti alla luce.

È stata realizzata [4]) la trasformazione degli acidi *a* negli acidi *b* in una serie di α sostituiti dell'acido cinnamico, sottoponendo alla irradiazione di lampade a Hg, gli isomeri *a* o in soluzione di solventi organici o allo stato di sali in soluzione acquosa.

Si ha così dall'*a* isomero dell'acido α fenilcinnamico f. a 172°, il *b* fondente a 137°; dal nitrile *a* dell'acido α fenilcinnamico f. a 86° il nitrile *b* liquido, dall'*a* dell'α fenossicinnamico f. a 181° il *b* fondente a 73°, dall'*a* dell'acido α fenossiparametossicinnamico f. a 200° il *b* f. a 120°; dal parametossistilben-carbonico $CH_3O - C_6H_4 - CH = C(C_6H_5) - COOH$ f. a 189° [5]) il *b* f. a 123°.

Per gli acidi α metilcinnamici si hanno due composti f. a 74° e 81°, ritenuti dimorfi dell'*a*. Sarebbe un caso simile all'acido cinnamico. Per irradiazione con la lampada a Hg entrambi si traformano nell'isomero *b* fondente a 92°.

L'isomero *a* dell'acido α etilcinnamico f. a 101°, irradiato in soluzione benzolica, si isomerizza nel *b* oleoso.

---

[1]) Stobbe e Bremer: J. pr., 123 (1929) 1.

[2]) Stobbe: B., LVIII (1925) 2859.

[3]) Stobbe: A., 371 (1910) 259 e 409 (1915) 1.

[4]) Stoermer e Voht: A., 409 (1915) 36.

[5]) Stoermer e Prigge: A., 409 (1915) 20.

Questi diversi isomeri *b* sono sempre più solubili degli *a* e hanno un p. f. più basso, eccetto per l'acido α metilcinnamico.

I *b* dànno più facilmente sali di anilina, le loro ammidi di solito hanno p. f. più alti dei rispettivi *a* meno per l'acido α fenossicinnamico e l'α fenossiparametossicinnamico, nei quali avviene l'inverso.

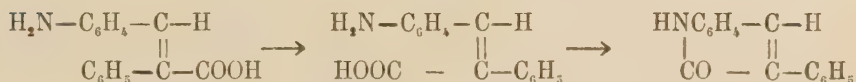
I tre orto, meta e para nitrocinnamici *a* [1,2]) si comportano alla luce in modo simile trasformandosi rispettivamente nei *b*: l'orto *a* f. a 240° nel *b* f. a 146°, il meta *a* f. a 200° nel meta *b* f. a 158° il para *a* f. a 286° nel *b* f. a 143°.

E gli esempi possono moltiplicarsi sia per gli acidi derivati dagli acidi cinnamici, sia per quelli della serie alifatica etilenica.

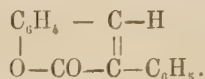
Ma per entrare senz'altro a considerare gli acidi fenilnitrocinnamici ricordiamo la isomerizzazione per irradiazione con la lampada a Hg del sale sodico dell'acido *a* fenilortonitrocinnamico f. a 196° nel *b* f. a 147° (St. e Pr). Come abbiamo già ricordato in questa memoria, quest'ultimo isomero si ottiene anche nella sintesi P. O.

L'uso del sale sodico impedisce la resinificazione, che si ha invece in soluzione acetonica dell'acido libero, resinificazione che è già attenuata dalla presenza del gruppo fenilico; infatti il sale sodico dell'acido ortonitrocinnamico irradiato si resinifica.

Il comportamento alla irradiazione ha permesso di confermare in pieno le formule di costituzione degli acidi fenilortonitrocinnamici e degli acidi f. cinnamici, che per altra via erano state determinate da uno di noi [3]). Infatti l'acido *a* f. o. n. cinnamico, ridotto ad ammino-acido e sottoposto alla irradiazione in soluzione benzolica, si trasforma quasi al completo in fenilcarbostirile.

$$\begin{matrix} H_2N-C_6H_4-C-H \\ \| \\ C_6H_5-C-COOH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_2N-C_6H_4-C-H \\ \| \\ HOOC - C-C_6H_5 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} HNC_6H_4-C-H \\ | \quad\quad \| \\ CO - C-C_6H_5 \end{matrix}$$

identico a quello che si ha direttamente dallo stereoisomero *b* ridotto in soluzione ammoniacale con solfato ferroso, bollito con barite e precipitato con un acido. Reazione analoga a quella che si determina per azione del nitrito sodico sul medesimo fenilamminocinnamico, il quale si trasforma in fenilcumarine:

$$\begin{matrix} C_6H_4 - C-H \\ | \quad\quad \| \\ O-CO-C-C_6H_5. \end{matrix}$$

---

[1]) Stoermer e Heymann: B., XLV (1912) 3099.

[2]) Wollring: B., XLVII (1914) 111.

[3]) Bakunin: G., XXX 11 (1900) 340.

Questo medesimo *b* amino-acido, diazotato e ridotto, si trasforma nell' acido *b* fenilcinnamico f. a 136°. La trasformazione inversa dell' acido *b* nell' acido *a* mostra talvolta una notevole difficoltà (St. e Pr). Infatti, mentre per l' acido o. n. cinnamico l' irradiazione solare sulla soluzione in $CHCl_3$ del *b* in presenza di Br determina una rapida trasformazione, per il f. o. n. cinnamico con la lampada HAEREUS dopo 48 ore di irradiazione dell' acido *b* in soluzione benzolica in presenza di Br si ebbe solo il 2 % di *a*.

Dei due acidi isomeri *a* e *b* le amidi e anilidi preparate da St. e Pr hanno come p. di f. l' amide *a* 173° e l' amide *b* 166°; l' anilide *a* 136° e l' anilide *b* 148°.

Per gli isomeri del f. meta e f. paranitrocinnamico oltre quanto è detto nella memoria citata (BAKUNIN), non vi è altro in letteratura.

La perdita del maggior numero dei dati nel lamentato incendio della Università di Napoli ci ha costretti a riportare solo quelli ancora per un fortunato caso, come si è detto, in nostro possesso. Per mancanza di tempo e di materiale alcuni saggi solo hanno potuto essere ripetuti, in ogni modo dall' insieme dell' esperienze si è potuto dedurre dei criteri di massima di un certo interesse.

La scarsezza delle rese in isomeri *b* nelle sintesi attuate ci ha indotto ad occuparci, anche nell' esperienze sulla irradiazione, sopratutto delle trasformazioni degli isomeri *a* negli isomeri *b*.

Le irradiazioni furono fatte sia con la lampada HAEREUS, sia con la luce solare; ma è bene si richiami l' attenzione sulla impossibilità di stabilire degli esatti confronti, non solo tra i risultati ottenuti con le due differenti sorgenti luminose lampade e sole, ma anche tra i risultati ottenuti con le irradiazioni della medesima sorgente.

Troppi sono i fattori che influenzano le trasformazioni e non sempre precisabili: incostanza delle sorgenti luminose, posizione esatta dell' oggetto irradiato rispetto alla sorgente irradiante, forma del contenente, ecc.

Le ricerche furono polarizzate sui solventi, sulla concentrazione delle soluzioni, sul tempo della esposizione e sulla influenza dello stato chimico del corpo (acidi o sali) o dell' addizione di corpi estranei. I risultati che si ritengono fino a un certo punto paragonabili, per aver curato identità di recipienti, uguali posizioni e contemporanea irradiazione, sono indicati nelle tabelle con identici piccoli numeri indici, aggiunti al numero d' ordine dell' esperienza.

Al sole i saggi si lasciarono sul terrazzo esposti giorno e notte. Perciò l' intensità luminosa e le ore di luce mutano con i mesi; quindi l' indicazione «giorno» non è sempre equivalente. Malgrado queste imprecisioni, delle logiche deduzioni di massima si sono potute, come vedremo, fare.

Le sostanze addizionate in taluni saggi, designate sotto il nome generico di catalizzatori, sono state a preferenza quelle che danno soluzioni colloidali o determinano ciclizzazioni o trasformano l' acido in sale.

La notevole differenza dello stato di aggregazione sugli effetti delle irradiazioni, emersa nello studio degli acidi cinnamici, ci ha consigliato prima di tutto di sperimentarli allo stato solido polveroso su superfici di vetro in strati sottilissimi.

Le esperienze sui corpi disciolti furono attuate o sugli acidi liberi in solventi organici, o sui loro sali sciolti in acqua.

I liquidi, quando fu possibile, furono posti in identici palloncini di quarzo, curando nei saggi in parallelo di collocarli così da essere irradiati, per quanto era possibile, dalla stessa quantità di luce; quando i recipienti di quarzo mancavano si usavano recipienti di vetro non coperti, sostituendo man mano, a fine della giornata, il solvente evaporato.

I tipi di lampade HAEREUS rispondevano a queste caratteristiche:

Lampada *A*: 140 V. che assorbe 2,5 A. La lampada era contenuta in una scatola aperta nella sola parte inferiore, in modo da ridurre al minimo le perdite per irraggiamento; al disotto dell'apertura vennero collocati i recipienti da irradiare. La distanza tra la sorgente luminosa e la superficie in esame era di 36 cm.

Lampada *B*: 110 V. che assorbe 4 Amp., semplicemente sospesa a sostegno. Nelle vicinanze della lampada a 7-8 cm. si collocarono i palloncini di quarzo.

Irradiazione degli acidi allo stato solido.

Irradiazione alla lampada a mercurio.

I sei isomeri in una quantità corrispondente a circa 1 gr. furono finemente polverizzati e stratificati su di un vetro del diametro di 10 cm. e irradiati da una lampada (tipo A) per 125 ore; salvo un lieve imbrunimento per l'orto non si constatò alcuna modificazione.

I punti di fusione e il differente comportamento delle loro soluzioni sodiche rispetto all'acido acetico ed all'acido cloridrico sono conservati da ciascuno isomero.

Irradiazione al sole.

Nelle stesse condizioni dei precedenti saggi irradiati dalla lampada si operò irradiando per otto giorni al sole, in sottile strato su vetro, nel mese di agosto, e, come per i precedenti, non si constatarono trasformazioni.

Tale comportamento alle irradiazioni conferma l'azione inibitrice sulla polimerizzazione di alcuni gruppi sostituenti l'H del nucleo fenilico.

Infatti, mentre gli acidi cinnamici, come si è detto, allo stato solido a preferenza si polimerizzano, i derivati con gruppi NO_2 sostituiti nel gruppo fenico non mostrano tale proprietà.

Irradiazione degli acidi in soluzione.

ACIDO FENILORTONITROCINNAMICO f. a 196° *a*.

Irradiazione con la lampada a Hg. *(tipo B).*

Le condizioni di esperienza ed i rendimenti ottenuti sono raggruppati nella tabella IV.

Si usarono solventi differenti: cloroformio. etere acetico, anidride acetica. acqua: in quest'ultimo l'acido era allo stato di sale di Na o di Cs. Si addizionarono quantità stechiometriche di ammine o piccole quantità di P_2O_5 ed SO_3. Le soluzioni erano contenute in palloncini di quarzo di 150 c. c. e si tennero a 6 cm. di distanza dalla lampada (tipo B) per 170 ore.

TABELLA IV.

N. d'ord.	Ac. *a*	solvente c. c.	catalizzatore	acido *b* ottenuto	acido *b* %	f. o. n. stilbene %
1[1]	gr. 6	$CHCl_3$ 150		0,12	2,10	
2[1]	» 6	» »	P_2O_5	0,12	2,10	
3[2]	» 6	anidr. acet. 27		0,12	2,10	
4[2]	» 6	» »	amilammina	0,42	7	
5[2]	» 6	» »	tripropilammina	0,54	9	
6[2]	» 6	» »	triamilammina	0,84	14	
7[3]	» 13,5	etere acet. 150		0,36	2,7	
8[3]	» »	» »	P_2O_5	0,37	2.8	
9[3]	» »	» »	SO_3	1,12	8.34	4
10[3]	» »	» »	»	0,99	7,4	5,5
11[4]	» 12,5	acqua 150	Cs	1,2	9.6	
12[4]	» »	» »	Na	1,67	13,4	

Osservazioni: — Rese scarse per gli acidi liberi, non migliorate per addizione di P_2O_5; migliorate per addizione di SO_3 con formazione di nitrostilbene; migliorate per addizione di ammina e per uso dell'acido allo stato di sale di cesio e di sodio. Il solvente non ha influenza.

Le rese percentuali diminuiscono al crescere della concentrazione, ma le quantità ottenute da un determinato volume di soluzione (che indicheremo convenzionalmente come *rese assolute*) sono tanto maggiori per quanto più alta è la concentrazione.

TABELLA V.

In queste esperienze l'acido allo stato di sale sodico era contenuto in capsule di 10 cm. di diametro non coperte, la lampada HAEREUS era quella indicata con la lettera A. Si tenne alla irradiazione 121 ore.

N. d'ord.	Acido f. o. n. cinnamico *a*	solvente	vól. solv.	acido *b* ottenuto	resa *b* °/₀
1[5]	gr. 5,2	H_2O	100 cc.	gr. 0,44	8,4
2[5]	» 1,1	H_2O	100 cc.	» 0,25	22

Osservazioni: Le rese in °/₀ aumentano con la diluizione e avviene l'inverso per le rese assolute.

Irradiazione alla luce solare.

TABELLA VI.

Sale sodico dell' acido sciolto in acqua contenuto in bocce di quarzo.

N. d'ord.	Acido *a* in gr.	mese	solvente	vol. solv.	giorni	acido *b* ottenuto	resa °/₀ *b*
1[6]	2.37	agosto	acqua	250 cc.	7	0,55	22,9
2[6]	10,81	»	»	»	7	1,75	16

TABELLA VII.

Acido irradiato allo stato libero.

N. d'ord.	Acido *a* in gr.	mese	solvente	vol. solv.	giorni	catalizzatore	acido *b* ottenuto	resa °/₀ *b*
1[7]	6,3	agosto	etere acet.	100 cc.	7		0,9	14,2
2[7]	2,7	»	» »	»	»		0,7	25
3[7]	1,3	»	» »	50 cc.	»	SO_3	0,27	21
4[7]	2,7	»	alcool	100 cc.	»		0,69	24,8
5[8]	2,5	ottobre	$CHCl_3$	»	10		0,75	30
6[8]	»	»	»	»	»	V_2O_5	0,76	30
7[9]	»	settem.	»	»	7	»	0,80	32
8[9]	»	»	»	»	»	SiO_2	0,66	26
9[9]	»	»	»	»	»	$ZnCl_2$	0,58	23

Osservazioni alle tabelle VI e VII. — Come alla lampada, la diluizione influisce sulla maggior resa percentuale e la minor resa assoluta in *b*, sia per il sale sciolto in acqua, sia per l'acido sciolto in solvente organico.

La presenza di V_2O_5 nella soluzione cloroformica dell'acido non sembra migliorare la resa in *b*, la presenza di SiO_2 e $ZnCl_2$ sembra peggiorarla.

Le soluzioni di acido libero per quanto più concentrate hanno dato una resa °/₀ maggiore delle corrispondenti acquose di sale, per l'acido si hanno maggiori imbrunimenti.

Le tabelle VIII, IX e X contengono i risultati di alcune prove eseguite per esaminare il decorso delle reazioni in funzione del tempo.

Tabella VIII.

Acido irradiato al sole allo stato di sale sodico.

Gr. 5,4 di acido allo stato di sale sodico sciolto in 200 cc. di acqua si sono esposti al sole. Inizio dell'esperienza fine aprile. Si sono prelevate 4 aliquote di soluzione in tempi diversi (ogni aliquota di 50 cc. di soluzione)

N. d'ord.	Acido *a*	mese	acido *b* ottenuto	resa *b* %
1	dopo 5 giorni gr. 1,35	28/IV-3/V	gr. 0,2	16
2	» 15 » » »	28/IV-15/V	» 0,32	25
3	» 33 » » »	28/IV-6/VI	» 0,53	39,2
4	» 50 » » »	28/IV-25/VI	» 0,61	45,1

Tabella IX.

Acido irradiato al sole allo stato di sale di litio.

Il sale corrispondente a 10 gr. di acido fu sciolto a 200 cc. di acqua. Si prelevarono due aliquote di 100 cc. ciascuna.

N. d'ord.	Acido *a*	tempo	acido *b* ottenuto	resa % *b*
1	gr. 5	15/VIII-15/IX	gr. 1,15	23
2	»	15/VIII-15/X	gr. 1,45	29

Tabella X.

Acido irradiato al sole allo stato libero.

Gr. 5,4 di acido in 200 cc. di $CHCl_3$ si sono esposti al sole nelle stesse condizioni della tabella VIII. Si prelevarono aliquote pari ad 1/4 della porzione sperimentata.

N. d'ord.	Acido *a*	mese	acido *b* ottenuto	resa *b* %
1	dopo 5 giorni gr. 1,35	28/IV-3/V	gr. 0,3	21,2
2	» 15 » » »	28/IV-15/V	» 0,39	28,8
3	» 33 » » »	28/IV-6/VI	» 0,33	24,4
4	» 50 » » »	28/IV-23/VI	tutto si abbruna. I precipitati sono scarsi e trascurabili.	

Osservazioni alle tabelle VIII, IX e X: — Si sono avuti abbrunimenti sopratutto nei saggi attuati sull'acido libero in solvente.

Le esperienze in funzione del tempo dimostrano che in soluzione cloroformica si ha fino ad un certo periodo di tempo un aumento, ma, prolungando l'azione, le rese di *b* si abbassano per formazione di sostanze brune, come appare dal colore giallo scuro che assumono man mano le soluzioni.

Per il sale sodico ed il sale di litio l'imbrunimento è assai minore e col prolungarsi del tempo della esposizione si ha un aumento della percentuale di *b*, anche dopo aver raggiunto un tempo di esposizione sufficientemente lungo. Per quanto riguarda le concentrazioni si ha la conferma delle osservazioni fatte precedentemente.

Se si considerano i numeri 1 e 2 delle tabelle VIII e X si constata una minore percentuale trasformata per il sale sodico rispetto all'acido libero, ma lo svantaggio dell'imbrunimento fa passare in seconda linea la resa maggiore; difatti col prolungarsi della irradiazione le rese per l'acido libero scemano ed i prodotti si alterano.

Si può concludere:

1° — L'acido f. o. n. cinnamico *a* si trasforma nel suo isomero sia per azione della luce solare sia per quella emessa dalla lampada a mercurio: la trasformazione sembra raggiungere uno stato di equilibrio.

2° — Le rese maggiori in % sono in rapporto alle maggiori diluizioni, le assolute alle maggiori concentrazioni.

3° — Per quanto la trasformazione sia funzione del tempo, ad evitare le azioni secondarie, occorre protrarre non oltre certi limiti l'irradiazione.

4° — Di solito lo stato di sale o la presenza di basi organiche facilita le trasformazioni: soltanto al sole si sono avute rese minori rispetto all'acido libero, ma la minore formazione di sostanze brune consiglia sempre preferire il sale che non subisce alterazioni notevoli anche col prolungarsi della irradiazione.

5° — L'addizione di P_2O_5 non ha giovato, quello di SO_3 ha contribuito all'aumento delle rese trasformando però anche parzialmente l'acido in nitrostilbene.

ACIDO FENILMETANITROCINNAMICO f. a 181° *a*.

Irradiazione alla lampada a Hg.

Si sono messe a reagire, nelle stesse condizioni in cui sono state condotte le esperienze per l'acido fenilortonitrocinnamico contemporaneamente alla stessa lampada A, in capsule aperte di diametro di 10 cm. di vetro ordinario per 121 ore, soluzioni di sale di sodio con concentrazioni diverse. I risultati sono contenuti nella seguente:

TABELLA XI.

N. d'ord.	Acido *a*	solvente	vol. solv.	acido *b*	resa °/₀ *b*
1[1]	gr, 5,2	H_2O	100 cc.	0,3	5,7
2[1]	» 2,1	»	» »	0,25	13,9

Irradiazione alla luce solare in bocce di quarzo.

TABELLA XII.

Allo stato di sale di sodio.

Acido *a*	mese	giorni	solvente	vol. solv.	acido *b*	resa °/₀ *b*
gr. 2	agosto	7	H_2O	200 cc.	gr. 0,62	31

Allo stato di acido

Acido *a*	mese	giorni	solvente	vol. solv.	acido *b*	resa °/₀ *b*
gr. 2,5	novembre	11	$CHCl_3$	100 cc.	gr. 0,85	34

Osservazioni alle tabelle XI e XII: — L'isolamento dei due isomeri *a* e *b* meta è, come si è detto precedentemente, più difficile e meno completo. I dati debbono essere considerati come approssimativi.

Il comportamento è simile a quello constatato con l'acido f. o. n. cinnamico per quanto riguarda la concentrazione delle soluzioni.

ACIDO FENILPARANITROCINNAMICO f. a 214° *a*.

Irradiazione alla lampada a Hg.

Allo stato di sale di sodio, in capsula aperta di vetro ordinario, di cm. 10 di diametro (lampada A, nelle stesse condizioni delle esperienze precedenti).

TABELLA XIII.

N. d'ord.	acido *a*	tempo ore	solvente	vol. solv.	acido *b*	resa °/₀ *b*
1[1]	gr. 5,2	121	H_2O	100 cc.	gr. 1,27	24
2[1]	» 1,1	121	»	» »	» 0,51	50

Osservazioni: — Il sale di sodio dà buone rese alla lampada per quanto riguarda la trasformazione dell'*a* in *b*. Maggiori percentuali e minori rese assolute con le maggiori diluizioni. In confronto con l'orto (pag. 29) le rese sono maggiori.

Irradiazione alla luce solare.

TABELLA XIV.

Allo stato di sale di sodio in palloncini di quarzo.

N. d'ord.	acido *a*	mese	giorni	solv.	vol. solv.	catalizzatore	acido *b*	rese °/₀ *b*
1[2]	gr. 2,5	ottobre	10	H_2O	100 cc.		1,1	44
2[2]	» »	»	»	»	» »	Ag. coll.	1,00	40
3[2]	» »	»	7	»	» »		0,89	35,6

Uguale resa con e senza argento colloidale — maggiore resa con prolungamento di esposizione.

Allo stato di sale di litio.

N. d'ord.	acido *a*	mese	giorni	solv.	vol. solv.	catalizzatore	acido *b*	rese % *b*
1[3]	gr. 2,5	agosto	4	H_2O	100 cc.		1,22	48,8
2[3]	» 5	»	4	»	» »		1,7	34
3	» 5	agosto e sett.	60	»	» »		1,8	36

Osservazioni: — Resa % maggiore a concentrazione minore, più bassa è la resa assoluta.

Il prolungare eccessivamente l'irradiazione non giova alla trasformazione.

TABELLA XV.

Allo stato di acido:

N. d'ord.	acido *a*	mese	giorni	solvente	vol. solv.	catalizzat.	acido *b*	resa % *b*
1[4]	gr. 2,5	sett.	7	$CHCl_3$	100 cc.		gr. 0,42	17
2[4]	»	»	»	»	» »	V_2O_5	» 0,62	25,2
3[4]	»	»	»	»	» »	SiO_2	» 0,48	19,2
4[4]	»	»	»	»	» »	$ZnCl_2$	» 0,52	20,8

Parrebbe che la presenza di V_2O_5 aumenti la resa, che resta sempre minore di quella raggiunta nelle esperienze precedenti, al sole, allo stato di sale.

Si può concludere:

1) L'acido f. p. n. cinnamico *a* si trasforma nel suo isomero *b* sia per azione del sole, sia per azione della luce della lampada a mercurio.

2) La trasformazione è sempre una reazione di equilibrio.

3) Le rese maggiori in % sono in rapporto con le maggiori diluizioni, le rese assolute con le maggiori concentrazioni.

4) Il prolungamento della irradiazione giova in certi limiti.

5) La trasformazione avviene in maggiore copia sottoponendo all'azione dei raggi solari l'acido allo stato di sale di litio o di sodio piuttosto che allo stato di acido libero in $CHCl_3$.

6) Il catalizzatore Ag colloidale non giova per il sale, parrebbe giovare il V_2O_5 per l'acido libero, ma tale conclusione merita conferma.

Seguono i risultati di alcune esperienze condotte per esaminare come procede la reazione inversa irradiando gli acidi *b* od i loro sali, che si trasformano nei corrispondenti *a*.

ACIDO FENILORTONITROCINNAMICO f. a 147° *b*.

Irradiazione alla lampada a Hg.

Allo stato di sale di sodio in capsula aperta nelle stesse condizioni delle precedenti esperienze eseguite con la lampada A.

acido *b*	tempo in ore	solvente	vol. solv.	acido *a*	resa °/₀ *a*
gr. 0,25	121	H_2O	50 cc.	0,07	28

Irradiazione alla luce solare.

Esposto allo stato di sale di sodio.

acido *b*	m e s e	solvente	vol. solv.	giorni	acido *a*	resa °/₀ *a*
gr. 1	agosto	H_2O	20 cc.	9	0,3 (bruno)	30

Osservazioni. — La trasformazione inversa si determina; e perciò si tratta di reazioni invertibili.

ACIDO FENILMETANITROCINNAMICO f. a 195° *b*.

Irradiazione alla lampada a mercurio.

Esposto allo stato di sale di sodio in capsula aperta nelle stesse condizioni delle precedenti esperienze eseguite con la lampada A.

acido *b*	tempo in ore	solvente	vol. solv.	acido *a*	resa °/₀ *a*
gr. 1	121	H_2O	50 cc.	0,2	20

Irradiazione della luce solare.

Allo stato di sale di sodio.

acido *b*	m e s e	giorni	solvente	vol. solv.	acido *a*	resa °/₀ *a*
gr. 2	agosto	7	H_2O	100 cc.	0,7	36

Osservazioni. — L'isolamento dei singoli isomeri, per le ragioni dette, non è completo. I dati devono essere considerati approssimativi. Può dirsi che la trasformazione avviene in un senso o nell'altro in quantità che sorpassano il 30 %.

ACIDO FENILPARANITROCINNAMICO f. a 143° *b*.

Irradiazione alla lampada a Hg.

Esposto allo stato di sale di sodio, sempre nelle medesime condizioni alla lampada A.

acido *b*	tempo in ore	solvente	vol. solv.	acido *a*	resa % *a*
gr. 1	121	H_2O	50 cc.	0,38	38

Irradiazione alla luce solare.

Allo stato di sale sodico.

N. d'ord.	acido *b*	mese	giorni	solv.	vol. solv.	catalizzat.	acido *a*	resa % *a*
1	gr. 2	agosto	4	H_2O	100 cc.		0,65	36

Allo stato di acido:

N. d'ord.	acido *b*	mese	giorni	solv.	vol. solv.	catalizzat.	acido *a*	resa % *a*
2[1]	gr. 1	sett.	7	$CHCl_3$	50 cc.		0,65	65
3[1]	»	»	»	»	»	V_2O_5	0,62	62

La trasformazione *b* → *a* avviene sia alla luce della lampada, sia al sole sia allo stato di acido che di sale. La presenza di V_2O_5 non pare avere influenza.

CONCLUSIONI

Dall'insieme di queste ricerche risulta che gli acidi f. n. cinnamici *a* e *b* allo stato solido e polverati finemente non subiscono modificazioni nè per azione della luce dalla lampada a mercurio, nè di quella solare.

Invece in soluzione si isomerizzano e non si polimerizzano, si trasformano a vicenda gli *a* in *b* ed i *b* in *a*, se irradiati da una qualunque di queste sorgenti luminose.

La trasformazione dell'*a* in *b* è più facile dell'inversa, ma si stabilisce sempre un certo equilibrio, cosicchè il prolungare di molto l'irradiazione altera i prodotti senza giovare all'isomerizzazione che si vuole attuare.

Nella trasformazione da *a* in *b* le rese percentuali crescono col tempo e diminuiscono al crescere della concentrazione. Le rese assolute aumentano con la concentrazione.

Le irradiazioni allo stato di sale danno in genere rese superiori, ma anche quando si è constatato un abbassamento di resa la formazione dei prodotti di alterazione bruni, maggiore nelle irradiazioni allo stato di acido, induce a preferire lo stato di sale.

Buoni risultati si sono avuti con basi organiche, con sali di sodio e di litio. In genere l'addizione di sostanze atte a dare soluzioni colloidali non ha migliorato le rese di acidi trasformati. L'addizione di SO_3 facilita le trasformazioni, ma determina anche una decomposizione più profonda in nitrostilbene.

Avendo come scopo la trasformazione degli acidi *a* in *b* è da consigliarsi: l'irradiazione con la luce solare sulle soluzioni dei sali in acqua e preferibilmente del sale di litio; usare soluzioni di una certa concentrazione per avere rese assolute maggiori; non prolungare l'irradiazione oltre gli otto giorni ed anche meno se si constata l'inizio di imbrunimento perchè le rese maggiori che si hanno con lunghe irradiazioni sono sempre accompagnate da perdita di materiale e da difficoltà di purificazione.

È perciò preferibile di separare i due acidi isomeri e ripetere l'irradiazione sull'isomero *a* residuo.

Molte altre osservazioni sul comportamento di sali differenti e su differenti solventi sono, come si è detto, andate perdute; ma i solventi, per quanto si ricorda, non hanno avuto influenza; invece sarà interessante ripetere le esperienze in parallelo sui sali di sodio, litio e magnesio e qualche sale organico. Per l'acido meta i risultati di altri saggi compiuti con più accurata separazione dei due isomeri andarono perduti: le percentuali riportate meritano perciò riconferma.

Le trasformazioni inverse degli acidi *b* in *a* si realizzano.

La maggior parte dei dati riguardanti queste ultime trasformazioni andarono perduti; da quelli riportati non si possono stabilire dei precisi confronti quantitativi con i saggi riguardanti le trasformazioni degli *a* in *b*.

Data l'influenza delle concentrazioni delle soluzioni, del tempo delle irradiazioni e dell'energia della sorgente si rimanda alle singole tabelle per la precisazione delle percentuali di rese nelle trasformazioni dell'*a* in *b* che oscillano a secondo delle condizioni di irraggiamento tra queste percentuali:

Alla lampada a Hg.

Irradiati allo stato di acidi, con lampada B, in recipienti di quarzo:

Orto	meta	para
2,00 — 2,80	andate perdute	andate perdute
7,4 — 8,3 (SO_3)	»	»

Irradiati allo stato di sali, con lampada B, in recipienti di quarzo:

9,6 (Ce) — 13,4 (Na)	andate perdute	andate perdute
? — 14 (basi organiche)	»	»

Irradiati allo stato di sali sodici, con lampada A, in capsule scoperte.

orto	meta	para
8,4 — 22	5,7 — 13,9	24 — 50

Al sole in recipienti di quarzo

Allo stato di sali:

16 — 45 (Na)	31	35 — 40
23 — 29 (Li)	—	36, — 48,8

Allo stato di acidi:

14 — 32	34	17 — 20,8

Istituto di Chimica Organica della R. Università di Napoli.

L'Ufficio centrale delle latitudini negli anni 1941-1944.

Nota del socio ordinario **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 6 giugno 1944)

Sunto. — Si parla del lavoro fatto in questi tre ultimi anni di guerra, in cui, essendo state interrotte le comunicazieni con le stazioni extra europee, l'Ufficio centrale si è trovato nell'impossibilità di compiere il lavoro abituale, di dedurre cioè dai primi calcoli la polodia provvisoria. Oltre al calcolo normale delle effemeridi per gli anni 1942, 1943, 1944 e 1945, si è iniziato quello definitivo delle osservazioni fatte nel sessennio 1935-1940, accennando fino a quale punto si è giunti.

Nell' ultima comunicazione mia su i risultati delle osservazioni internazionali di latitudine, comparsa nel 1941 nei Rendiconti di questa R. Accademia, ho accennato alle difficoltà, che in conseguenza della guerra già

si stavano frapponendo al normale nostro lavoro, e che per il 1940 mi avevano obbligato a limitare sensibilmente i computi abituali, essendo mancati completamente i libretti di osservazione di Adelaide. Dopo di allora, come è facile immaginare, la situazione si è andata via via aggravando fino al settembre 1943, epoca in cui essendo state tagliate tutte le comunicazioni, si rimase isolati fino alla fine dello scorso inverno; e solo poi in grazia dell' interessamento dell'Astronomo Reale per l' Inghilterra Sir H. Spencer Jones, direttore dell' Osservatorio di Greenwich, e del Dottor W. D. Lambert, capo della sezione per l'astronomia e gravimetria del Coast and Geodetic Survey degli Stati Uniti, poterono esser riannodate le relazioni. Il serzizio internazionale delle latitudini, che dura ormai da oltre 40 anni, ed aveva superato senza inconvenienti la dura prova della guerra del 1914-18, pur avendo questa volta risentito molto dalla guerra attuale, tuttavia, a quanto ci è dato di apprendere, non ha subito interruzioni tali da veder compromesso il lavoro. Le stazioni americane degli Stati Uniti hanno seguitato i lavori regolarmente, e mi si è stato già annunciato l' invio dei libretti di osservazione per il periodo, che va dal settembre 1941 ad oggi. Da La Plata, ove pure i lavori continuano, per il gentile interessamento dell'Ambasciata Argentina a Roma, alla quale rinnovo qui i più sentiti ringraziamenti, si è potuto avere i libretti fino al marzo 1943, ed ora certamente riceveremo il seguito. Delle stazioni asiatiche di Kitab, e di Mizusava si sono avuti i libretti fino al maggio 1941, e certamente in ambedue il lavoro ha proseguito col suo ritmo normale e speriamo, grazie all' intervento di Sir H. Spencer Jones, ricevere ben presto i libretti della prima delle due stazioni. Nulla ci è dato di sapere invece di Batavia. La nostra stazione di Carloforte, che aveva funzionato regolarmente fino alla primavera del 1943, dovette poi esser chiusa in consegnenza delle operazioni di guerra dopo aver smontati tutti gli strumenti; ora, in seguito al vivo interessamento degli astronomi e geodeti inglesi ed americani, l' Eccellenza il Ministro della P. I. accogliendo una mia proposta ha dato le necessarie disposizioni per la ripresa della sua attività, e tutto lascia sperare, ciò possa avvenire nel corso della presente estate.

Di tutte le osservazioni fatte posteriormente al principio del 1941, ed a noi pervenute fino ad oggi, sono stati eseguiti i relativi calcoli, ma, come ben si comprende, il loro complesso non è stato sufficiente per dedurre anche una approsimativa traiettoria del Polo. Vennero invece calcolate regolarmente tutti gli anni, e col necessario tempo di anticipo, le effemeridi delle stelle osservate nelle stazioni dei tre paralleli: vennero preparati perciò i fascicoli per gli anni 1942, 43 e 44, ed è in corso di calcolo quello relativo al 1945. Si è approfittato poi del diminuito lavoro causato dal mancato arrivo dei libretti di osservazione, por iniziare il calcolo definitivo delle osservazioni fatte nel sessennio 1935-40. Come prima cosa è stato necessario procedere al calcolo e discussione delle osservazioni com-

plementari eseguite al fine di determinare le costanti strumentali del valore angolare del passo del micrometro, e di una parte della divisione incisa sulle livelle. Per la prima determinazione si avevano osservazioni di stelle circumpolari in prossimità delle loro massime elongazioni, e misure di differenze di declinazione di coppie di stelle opportunamente scelte e proposte a tale scopo dal prof. Kimura. Di queste ultime determinazioni che ammontano ad alcune migliaia, si dovette eseguire quasi sempre completamente il calcolo, essendoci stati comunicati solmente i puri e semplici risultati delle osservazioni. La discussione del materiale è stata lunga e minuziosa, ed i risultati sono contenuti in una mia memoria, pronta per la stampa fin dalla fine della scorsa estate; ma poichè temo, non sia prossimo il giorno, in cui potrà venire alla luce, e vi sono alcuni risultati, che pur potrebbe interessare, penso riassumerla in una breve nota, che potrà trovar spazio in questi nostri Rendiconti.

Servendoci dei valori conchiusi nella discussione or ora accennata si sono ricalcolate le 60 mila osservazioni di latitudine fatte nel sessennio; ed utilizzando poscia questi nuovi valori si è passati alla deduzione del valore definitivo del passo dei micrometri per le sette stazioni, e delle correzioni delle declinazioni medie delle coppie osservate. Questo lavoro lungo, che non può esser fatto, se non col sistema delle successive approssimazioni, è ormai conchiuso e finito per le stazioni australi, e ben poco manca ancora per le boreali. I valori ricavati per le correzioni delle declinazioni possono esser ritenuti sicuri entro $\pm$ 0″.01 per quasi tutte le coppie, e solo per qualche rara coppia l'incertezza potrà risultare di poco maggiore. I risultati avuti per la determinazione del passo non sono stati meno notevoli; si è potuto assodare la realtà di variazioni del passo, forse più frequenti di quanto non si sarebbe potuto prevedere a priori, ed è questo un punto sul quale converrà rivolgere bene l'attenzione in avvenire sia da parte degli osservatori, che da parte dell' Ufficio centrale. Via via, che si procede in questo lavoro, si stanno ricalcolando per la terza volta tutte le 60 mila osservazioni di latitudine, e tutta lascia sperare, che per la fine del corrente anno anche questo terzo calcolo sarà ultimato, e si potrà quindi procedere alla deduzione della polodia definitiva, ed allo studio delle variazioni locali. Credo non ingannarmi ritenendo, che per la primavera prossima il lavoro sarà finito, e che dopo breve tempo si avrà pronto per la stampa il manoscritto del volume, che essendo il nono della serie internazionale, sarà il primo nostro italiano e testimonierà come anche imperversando la guerra, si sia continuato senza interruzioni il lavoro, attendendo al compito affidatoci.

Miofibrille e loro bande

Nota del socio prof. **Vincenzo Diamare**

(Adunanza del dì 5 giugno 1945)

Sunto. — L'A. pone in raffronto due lavori pubblicati nel 1940, riguardanti la fine struttura e la costituzione delle fibre muscolari striate, uno dei quali offre considerazioni critiche e osservazioni in contrario, la cui migliore e più esauriente risposta trovasi in due lavori di altro autore, compiuti nell'Istituto anatomico di Pavia.

Sulla fine struttura e l'istofisiologia delle fibre muscolari striate sono comparsi nel 1940 tre scritti, uno del Dott. G. Ciaccio dell'Istituto zoologico di Padova e gli altri due del Prof. Loreto dell'Istituto anatomico di Pavia. Dello scritto del primo e delle sue misconoscenze e studiati appunti al lavoro della mia allieva Titomanlio, non avrei tenuto affatto conto, giacchè malgrado le figure e le circonlocuzioni questo scritto non porta alcun contributo reale all'argomento. Ma attesochè, viceversa, gli scritti del Loreto, emananti da una scuola differente, con altro animo e con conoscenza dei problemi e della letteratura, sono la migliore risposta per ricerche, idee e dati di fatto, alle misconoscenze del Ciaccio e così d'accordo, anche per esplicita dichiarazione, con le mie e dell'allieva Titomanlio, così, riepilogo in questa breve nota, alcuni rilievi. Il lungo periodo di silenzio è derivato dallo stato di emergenza e dalla rovina dell'Istituto e delle mie carte, fra le quali solo ora ho potuto rintracciare alcuni appunti e scritti.

I. Circa il valore delle miofibrille toraciche degli artropodi non era intenzione di Titomanlio offrire motivi di convincimento a chicchessia, giacchè l'Autrice era perfettamente all'unisono con tutti coloro che le studiarono. E che esse fossero « miofibrille » spettanti alle lasse fibre muscolari toraciche ha ben esplicitamente detto, insistendo, viceversa, sul fatto che la loro maggiore consistenza le faceva riguardare e funzionare come fibre a sè stanti nel lasso sarcoplasma musculare.

È all'inverso ben singolare che Ciaccio confermi, senza citare nè Titomanlio nè me, che in esse è ben distinta la linea Z e che queste fibre alari documentano l'erroneità del concetto della disposizione elicoide — uno degli argomenti più emergenti delle nostre ricerche.

II. Sorvolando su dizioni e circonlocuzioni, attesochè a tutte rispondono egregiamente le ricerche, così esatte, del Loreto, accenno solo che, mentre si attarda il Ciaccio a far conoscere la cosa, risaputa da tutti noi, che a fresco subito non appare altra banda che Z, indica poi che nei pre-

parati fissati « delle strie compaiono » quasichè da noi si fosse detto qualche cosa di diverso e dimenticando che egli stesso, a pag. 571 del suo scritto cita MEIGS il quale nelle fibre alari distingue i sarcostili ed identifica il disco Q il disco I e perfino la linea di HENSEN! Che se si indicarono come « miofibrille isolate » ciò deriva dal fatto che sono di per se isolabili dal tenue sarcoplasma delle fibre toraciche.

III. Ben altrimenti nello spassionato studio del LORETO sono esposte con scrupolosità i fatti descrittivi e sono citate le nostre osservazioni ed a proposito. Per quanto concerne la costituzione stessa delle miofibrille — altro argomento cruciale della mia ricerca e di TITOMANLIO — è certamente soddisfacente che, senza circonlocuzioni equivoche, l' A. si esprime, riconoscendo con me che Z e la linea d' AMICI in senso stretto non sono la stessa cosa; che Z non è in veruna fibra a disposizione elicoide, ma è parte integrante delle miofibrille. E ben a ragione insiste quanto me, sulla birifrangenza di Q e sulla monorifrangenza di quelli che io, per il primo, ho chiamato « tratti parazetali ». Che Z sia di regola monorifrangente convalida, salvo casi speciali anche da me discussi ed ancora da interpretarsi a mio parere.

IV. Sopratutto, sulla questione istofisiologica più importante, emergendo sugli equivoci altrui e senza brancolare nell' indeciso, così caro ai raintesi, il LORETO si riporta, parimente, alle questioni fisico chimiche fondamentali. Donde a contrapposto dello scritto del CIACCIO io posso chiudere la presente nota riportando integralmente le parole del LORETO: « I concetti su esposti nei riguardi delle probabili condizioni colloidali che io ritengo si possono attribuire alla sostanza contrattile della f. m. s. delle zampe e delle ali negli artropodi (insetti) in particolare presentano punti di analogia con quelli già esposti dal DIAMARE (21, 22 1930-1931) e dalla TITOMANLIO (52, 1930). Io ritengo che il « miocolloide colonnare » di DIAMARE sia identificabile colle serie longitudinali micellari di miosina, le quali rappresentano il substrato colloidale che permette l' istituirsi in determinate condizioni, di quelle entità morfologiche che sono le « miofibrille ». Queste perciò non rappresentano entità strutturali elementari stabili della sostanza contrattile ma sono solo l' espressione di una condizione chimico-fisica della fase miofibrillabile [1]), che, *in vivo* è reversibile e che è inerente al momento funzionale e fors' anche alle condizioni di nutrizione della fibra. Nei preparati fissati o comunque in materiale in non perfette condizioni di ambiente, tale struttura diventa particolarmente evidente e stabile ».

---

[1]) Frase da me già propriamente usata.

BIBLIOGRAFIA

V. Diamare — *Sui corpi mielinici del sangue e dei muscoli striati e sull'anisotropismo della fibra striata.* Rivista di Biologia, Vol. V, fasc. IV, con una doppia tavola, 1923.

— — *Sul miosarcoplasma. Sull'anitropismo delle fibrocellule miocardiche e degli elementi di Purkinje.* Idem, Vol. VI, fasc. 3, (con tre fig. nel testo), 1924.

— — *L'anisotropia negli inocommi degli insetti e dei vertebrali* (Mem. III). Archivio it. di Anatomia ed Embriologia, Vol. XXII, fasc. 2 (con una tavola doppia). Firenze, 1925.

— — *La birefrazione nella striatura delle fibre muscolari dei Vertebrati ed artropodi.* Rassegna di Terapia e Patologia clinica (Vol. di onoranza al Prof. Marfori), anno VII n. 11.

— — *Ancora sulla birefrazione delle fibre muscolari striate (anche cardiache) e delle cellule dei cordoni di Purkinje.* Risposta al Prof. W. J. Schmidt in Giessen. Rivista di Biologia, Vol. XXIV, 1938 (con tre fig. nel testo).

M. Titomanlio — *Studii critici e ricerche sul comportamento ottico della sostanza muscolare striata e su relazioni tra chimico-fisica e struttura di questa.* Archivio Zool. it., Vol. XIV, (tav. 5), 1930.

G. Ciaccio — *Ricerche sull' azione degli agenti chimici sulle fibre dei muscoli delle ali di alcuni coleotteri.* Zeitschrift für Zellforschung und mikroskopisce Anatomie 30 Bd., 4 Hefl, 1940.

F. Loreto — *Sulla struttura della fibra muscolare negli artropodi.* Atti R. Acc. d'Italia. Memorie (classe sc. fis. mat. e Nat.), Vol. XI, 1940.

— — *Ulteriori osservazioni sulla struttura della fibra muscolare striata negli artropodi.* Commentationes. Pontificia Acad. Scientiarum. Anno IV, Vol. IV, n. 12, 1940.

W. J. Schmidt — *Die Doppelbrechung von Karyoplasma, Zitoplasma und Metaplasma* (180 fig. in text). Elfter Bd., Ed. Borntraeger, Berlin, 1930.

Le temperature nella crosta terrestre e l'orogenesi

Nota del prof. **Alfredo Rittmann**, *presentata dal socio* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 5 dicembre 1944)

Sunto. — Sono riportati in questa nota i risultati di una memoria dallo stesso titolo, da me elaborata già da qualche anno, che non è stata ancora pubblicata a causa delle attuali gravissime difficoltà di stampa. In tale memoria, col mettere tra loro in relazione i dati forniti dalla geofisica e dalla geologia e con l'elaborarli in base alle leggi della chimica-fisica, ho tentato anzitutto di stabilire l'andamento delle temperature nella crosta terrestre fino ad una profondità di circa 100 km. In secondo luogo, stabilito il comportamento termico della crosta terrestre, ho esaminato la influenza che esso ha, col provocare correnti magmatiche subcrostali, nella genesi e nello sviluppo dei movimenti geotettonici.

1. *La legge di distribuzione delle temperature nella crosta terrestre.*

Attraverso la crosta terrestre, che separa due zone a diversa temperatura, e cioè l'interno terrestre dall'atmosfera, deve esistere un flusso termico per effetto del quale le zone interne della terra, caldissime, cedono calore all'atmosfera, notevolmente più fredda. Inoltre la crosta terrestre, come è noto, è sede a sua volta, ad opera delle sostanze radioattive in essa contenute, di processi di produzione di calore; ed anche questo calore viene, naturalmente, trasmesso all'atmosfera.

Per una prima schematizzazione dei fenomeni, che, come vedremo più avanti, sono in realtà molto complessi, cominceremo a considerare la crosta in condizioni di regime termico stazionario. Supporremo cioè che la crosta di spessore S si possa idealmente immaginare costituita da tanti elementi prismatici di altezza S e di base unitaria (1 cm²) e che ciascun elemento si comporti identicamente agli altri, cioè non ceda nè riceva calore dagli altri elementi adiacenti; il che significa anche supporre che tutti gli elementi siano di eguale composizione e che, dato il sottile spessore della crosta rispetto al raggio terrestre, possa considerarsi trascurabile la differenza dei raggi di curvatura tra la superficie esterna e quella interna della crosta, anche quando si considerino zone molto estese.

In tali ipotesi, la crosta terrestre di spessore S riceve inferiormente, cioè dall'interno terrestre, per ogni centimetro quadrato nell'unità di tempo una certa quantità di calore, che indicheremo con W_S [cal cm^{-2} sec^{-1}] e ne trasmette all'ambiente esterno più freddo, che possiamo considerare a

temperatura costante t_0 [1]), un' altra quantità maggiore, che indicheremo con W_0. In altri termini la quantità di calore irradiata dalla unità di superficie terrestre (W_0) può immaginarsi divisa in due parti: l'una (W_s) proveniente dalle zone subcrostali, l'altra prodotta nell'interno della crosta dalle sostanze radioattive.

In un punto generico nell' interno della crosta terrestre a profondità x la quantità W di calore che passa in un secondo per ogni cm^2 di superficie isotermica può dunque considerarsi uguale alla quantità irradiata in superficie (W_0) *meno* la quantità di calore radioattivo prodotto nel cilindro di altezza x e base unitaria, oppure alla quantità di calore proveniente dalle zone subcrostali (W_s) *più* la quantità di calore radioattivo prodotto nel cilindro di altezza $S-x$ e base unitaria.

Chiamando $\omega = f(x)$ la quantità di calore radioattivo prodotto in ogni cm^3 della crosta e per ogni secondo [cal cm^{-3} sec^{-1}], quanto precede può esprimersi con le seguenti espressioni.

$$[1] \quad \begin{aligned} W_0 &= W_s + \int_0^s \omega\, dx \\ W &= W_0 - \int_0^x \omega\, dx = W_s + \int_x^s \omega\, dx. \end{aligned}$$

Se indichiamo con $\lambda = \varphi(x)$ la conducibilità termica, che supponiamo per ora funzione della sola profondità [2]), dalla seconda delle [1] discende che il gradiente termico ad una generica profondità x nella crosta terrestre è

$$[2] \quad \frac{dt}{dx} = \frac{W}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[W_0 - \int_0^x \omega\, dx \right] = \frac{1}{\lambda}\left[W_s + \int_x^s \omega\, dx \right]$$

ed integrando

$$[3] \quad t - t_0 = \int_0^x \frac{W}{\lambda} dx = W_0 \int_0^x \frac{dx}{\lambda} - \int_0^x \frac{dx}{\lambda} \int_0^x \omega\, dx = W_s \int_0^x \frac{dx}{\lambda} + \int_0^x \frac{dx}{\lambda} \int_x^s \omega\, dx.$$

---

[1]) Per t_0 può assumersi la *temperatura di inversione del suolo* che, come è noto, è uguale a 10°C.

[2]) In realtà, anche nella supposizione che la crosta sia formata da involucri uniformi, λ dipende da t oltre che da x. Per la relativa discussione si rimanda alla memoria di prossima pubblicazione.

Se λ si suppone costante [3] diventa

$$[3'] \quad t - t_0 = \frac{1}{\lambda}\int_0^x W dx = \frac{W_0}{\lambda} x - \frac{1}{\lambda}\int_0^x dx \int_0^x \omega\, dx = \frac{W_s}{\lambda} x + \frac{1}{\lambda}\int_0^x dx \int_x^s \omega\, dx.$$

Le formule si possono mettere in funzione di t_s (temperatura alla base della crosta) scrivendo rispettivamente la [3] e la [3′] come segue:

$$[4] \quad t_s - t_0 = \int_0^s \frac{W}{\lambda} dx = W_0 \int_0^s \frac{dx}{\lambda} - \int_0^s \frac{dx}{\lambda} \int_0^x \omega\, dx = W_s \int_0^s \frac{dx}{\lambda} + \int_0^s \frac{dx}{\lambda} \int_x^s \omega\, dx$$

$$[4'] \quad t_s - t_0 = \frac{1}{\lambda}\int_0^s W dx = \frac{W_0 S}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^s dx \int_0^x \omega dx = \frac{W_s S}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^s dx \int_x^s \omega\, dx.$$

Sottraendo membro a membro [4] e [3], [4′] e [3′] abbiamo

$$[5] \quad t_s - t = \int_x^s \frac{W}{\lambda} dx = W_0 \int_x^s \frac{dx}{\lambda} - \int_x^s \frac{dx}{\lambda} \int_0^x \omega\, dx = W_s \int_x^s \frac{dx}{\lambda} + \int_x^s \frac{dx}{\lambda} \int_x^s \omega\, dx$$

$$[5'] \quad t_s - t = \frac{1}{\lambda}\int_x^s W dx = \frac{W_0 (S - x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_x^s dx \int_0^x \omega dx = \frac{W_s (S - x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_x^s dx \int_x^s \omega\, dx.$$

Tutte queste espressioni consentono, noti la funzione $\omega = f(x)$ ed il valore di λ (ovvero la funzione $\lambda = \varphi(x)$), di effettuare il calcolo della distribuzione delle temperature nell'interno della crosta, purchè si conoscano almeno due dei quattro valori limiti W_0, W_s, t_0 e t_s [1]). Vedremo nel paragrafo seguente quali sono i dati che la scienza fino ad oggi può mettere a nostra disposizione.

2. *Costituzione e caratteristiche termiche della crosta terrestre.*

Sulla base delle più recenti ricerche, si può ritenere che la crosta terrestre continentale sia spessa in media all'incirca 70 km e sia costituita da tre gusci distinti che possiamo indicare con

A = Sial I, spessore circa 20 km
B = Sial II, spessore circa 25 km
C = Sima, spessore circa 25 km.

---

[1]) Per maggiori dettagli e per la trattazione di vari casi particolari si veda a memoria di prossima pubblicazione.

Sulla costituzione dei due gusci *B* e *C* non si è ancora raggiunto un accordo completo, mentre per il Sial I è opinione generale che esso sia costituito in grande predominanza da graniti e gneiss. Chi scrive è di opinione che il Sial II sia costituito da una roccia di tipo dioritico-lamprofirico, corrispondente cioè ad un granito depauperato dell'eutettico quarzo-feldspato; il Sima da rocce alcalibasaltiche oliviniche *(oceanite)*.

Al disotto del Sima v'è la zona magmatica, costituita da magma originario [1]), sulla cui natura ancora non si è raggiunto un pieno accordo tra gli studiosi. La maggioranza ritiene che si tratti comunque di magma basaltico, ma chi scrive è di opinione, per vari motivi già esposti altrove [2]), che si tratti di un magma alcalibasaltico olivinico, cioe del medesimo materiale del Sima, fuso. Tale massa fusa è, al disotto della crosta continentale, cioè a circa 70 km di profondità, alla pressione di circa 20.000 atm con una viscosità dell'ordine di 10^{21} — 10^{22} *poise*.

Gli spessori di Sial I, Sial II e Sima avanti indicati, si riferiscono alla crosta continentale normale. Le ricerche geofisiche (sismiche) lasciano dedurre che tali spessori variano notevolmente in altre regioni: sotto le Alpi, ad esempio, il Sial I arriva ad una potenza di circa 40 km; il Sial I ed il Sial II nell'Oceano Alantico hanno complessivamente uno spessore di soli 20 km, mentre nell'Oceano Pacifico il Sial manca affatto ed affiora direttamente il Sima.

Sono questi i dati che possediamo sulla costituzione della crosta terrestre, dai quali possiamo partire per le nostre ulteriori considerazioni.

Alla base della crosta continentale, cioè a circa 70 km di profondità, deve, per quanto detto precedentemente, essere raggiunta la temperatura di fusione del basalto [3]) o, meglio, una temperatura tale che gran parte del basalto sia fuso. Come « punto di fusione » [4]) del basalto a pressione normale

---

[1]) Dicesi *magma*, una massa naturale silicatica, completamente fusa o in via di cristallizzazione, contenente in soluzione sostanze facilmente volatili, che costituisce unità geologiche sotto o dentro la crosta terrestre. Dicesi *magma originario* (o anche *primordiale*) il magma che costituisce la zona subcrostale, perciò detta zona magmatica, o ne proviene senza aver subito alcun cambiamento nella sua composizione.

[2]) Vedi RITTMANN A.: *Vulkane und ihre Tätigkeit*, Stuttgart, 1936; *Vulcani, attività e genesi*, Napoli, 1944; Geol. Rundschau, 1938; ibidem, 1939 ed anche PENTA F. Boll. Soc. Sismologica Italiana, 1939.

[3]) Ciò vale anche se non si ammette che il Sima e il magma originario abbiano la composizione di un alcalibasalto olivinico, cioè carattere « atlantico », e si ritiene all'incontro che il magma originario e il Sima abbiano la composizione di un basalto tholeiitico, cioè carattere « pacifico ».

[4]) Poichè il basalto è composto di più specie minerali, appartenenti anche a serie isomorfiche, non può parlarsi di *punto di fusione*, bensì di *intervallo di fusione*, esteso per qualche centinaia di gradi.

possiamo assumere la temperatura di 1050°C perchè a tale temperatura le lave basaltiche oceanitiche sono scorrevoli, sebbene constino di una sospensione di molti cristalli di olivina, augite e plagioclasio basico in una massa fusa di composizione trachiandesitica. Questo valore, così inteso, si trova ovviamente a temperature più alte allorchè il materiale è sottoposto a pressioni maggiori. Secondo la formula di Clapeyron-Clausius, integrata da Tamman e tenendo conto delle costanti sperimentali determinate da un gran numero di ricercatori, si può ammettere che la temperatura alla base della crosta continentale si aggiri intorno ai 1170°C ± 30°. Il che è già un buon punto di partenza per i nostri ragionamenti.

Tentiamo ora di stabilire il valore di W_0, cioè il valore del flusso termico unitario trasmesso dalla terra in ogni suo punto all'atmosfera; a ciò are occorre, ricordando la formula [2], determinare il valore del gradiente termico $\frac{dt}{dx}$. In geologia si è di solito abituati a riferirsi al valore reciproco, detto *gradino geotermico* (γ) che, come si dice comunemente, ha un valore medio di $\gamma = 33$ m°C^{-1}. In effetti il *gradino geotermico* (γ) varia da un minimo estremamente piccolo ai vulcani fino al massimo di oltre 110 m°C^{-1}, determinato in un sondaggio presso Johannesburg nel Sud-Africa; il valore indicato di 33 m°C^{-1} ha perciò solo carattere di media, senza alcun significato fisico.

Sulla base di varie considerazioni si può ritenere che il *gradino geotermico* abbia nei sedimenti e nei graniti valori medi dell'ordine di

$$\gamma_1 = 24{,}4 \text{ m°C}^{-1} \text{ nei sedimenti}$$
$$\gamma_2 = 45 \quad \text{m°C}^{-1} \text{ nei graniti e gneiss}$$

talchè, indicando con λ_1, e λ_2 il valore della conducibilità termica, rispettivamente nei sedimenti e nei graniti, e dato che il flusso termico W_0 può ritenersi praticamente costante, si ha dalla [2]

$$W_0 = \lambda_1 \left(\frac{dt}{dx}\right)_1 = \lambda_2 \left(\frac{dt}{dx}\right)_2$$

cioè

$$W_0 = \frac{\lambda_1}{\gamma_1} = \frac{\lambda_2}{\gamma_2}. \tag{6}$$

Assumendo per λ_1 e λ_2 i valori risultanti dai dati di parecchi sondaggi si giunge per W_0 ad un valore medio di

$$W_0 = 1{,}64 \cdot 10^{-6} \text{ cal cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \tag{7}$$

che ci servirà in seguito per i nostri calcoli.

In realtà la determinazione di λ nella crosta terrestre presenta grande difficoltà perchè, oltre la natura del materiale, occorre conoscere l'influenza che hanno in tale valore le condizioni di pressione e di temperatura.

Talune esperienze di Bridgman pare dimostrino che l'influsso della pressione sia minimo, mentre importanza maggiore deve avere la temperatura. In base a considerazioni di varia natura, per i nostri calcoli abbiamo attribuito, e non crediamo di essere con ciò molto lontani dal vero. al Sial I un $\lambda_1 = 8 \cdot 10^{-3}$ ed al Sima, a 60 km di profondità un $\lambda_3 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ ed in superficie (sotto l'oceano Pacifico) un $\lambda'_3 = 4 \cdot 10^{-3}$. Quanto al Sial II, esso in tutte le sue proprietà fisiche, rivelate dalle ricerche sismiche, mostra valori intermedi tra quelli del Sial I e del Sima, più simili però a quelli del Sial I, talchè è lecito attribuirgli un valore $\lambda_2 = 6.5 \cdot 10^{-3}$ [1]).

In base ai dati finora discussi e accettati, possiamo calcolare, mediante le formule date nel § 1, le temperature che si avrebbero nella crosta terrestre se il flusso termico $W_0 = 1{,}64 \cdot 10^{-6}$ cal. cm^{-2} sec^{-1}, irradiata in superficie, fosse proveniente interamente dall'interno della terra, cioe dalla zona subcrostale. Si troverebbe così nella crosta continentale normale, per la base del Sial I $t_1 = 420°C$, per la base del Sial II $t_2 = 1050°C$ e per la base del Sima (70 km) $t_3 = 1962°C$, laddove in base ad altri ragionamenti è giuocoforza ammettere che ivi regni soltanto una temperatura di 1170°C. Quei valori sono quindi da escludere per il fatto che, qualora fossero esatti, il Sial I, ove avesse profondità superiori ai 20 km, dovrebbe fondere nella crosta sub continentale a soli 37 km di profondità, il Sial II a circa 43 km ed il Sima a 47 km; il che è in contraddizione con i dati rilevati dalla Sismologia. Si deve pertanto ammettere che nella crosta stessa viene prodotta una quantità di calore considerevole e che il flusso termico W_0 è la somma del calore proveniente dall'interno della terra (W_s) e di quello prodotto nella crosta dalle sostanze radioattive. Il problema che si pone è perciò quello di stimare come sono distribuite le sostanze radioattive nella crosta e di conseguenza quanto calore viene prodotto da esse. Orbene in base a varie considerazioni, per le quali rimandiamo alla memoria di prossima pubblicazione, possiamo ammettere in prima approssimazione che, in media, l'arricchimento delle sostanze radioattive cresce al diminuire della profondità secondo una equazione iperbolica del tipo

$$\omega_x = \frac{b}{x + a} \qquad [8]$$

[1]) Proprio per la conduttività termica, che è la proprietà meno conosciuta, è da attendersi che nuove determinazioni modificheranno i risultati numerici che troveremo più innanzi per le temperature nella crosta terrestre. Chi scrive è pertanto perfettamente conscio del fatto che i valori assunti hanno soltanto carattere provvisorio, non tanto erronei bensì da dover mutare le linee generali delle conclusioni cui si giungerà. Il che giustifica anche perchè per ciascun guscio non terremo conto della variazione di λ per effetto della temperatura.

ove ω è il calore radioattivo prodotto da un cm³, in un secondo, dalle rocce costituenti la crosta terrestre e le costanti hanno il valore:

$$a = 2{,}16 \,.\, 10^{5}$$
$$b = 2{,}4 \;\,.\, 10^{-7}.$$

In base ai valori su riportati, integrando la prima delle [1]

$$W_0 = W_s + \int_0^s \omega\, dx$$

quando
$$\int_0^s \omega\, dx = \int_0^{7\,.\,10^6} \frac{2{,}4\,.\,10^{-7}}{x + 2{,}16\,.\,10^5}\, dx$$

e ricordando che $W_0 = 1{,}64\,.\,10^{-6}$, abbiamo

$$1{,}64\,.\,10^{-6} = W_s + 2{,}4\,.\,10^{-7}\; ln \frac{7{,}216\,.\,10^6}{2{,}16\,.\,10^5} = W_s + 0{,}84\,.\,10^{-6}.$$

Da cui

$$W_s = 0{,}80\,.\,10^{-6} \text{ cal cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}.$$

Cioè nella crosta terrestre continentale normale (alto cratone [1]), caratterizzata da regime termico stazionario delle temperature nell' interno della crosta profonda 70 km, può affermarsi che la quantità di calore irradiata dall' unità di superficie al secondo

$$W_0 = 1{,}64\,.\,10^{-6} \text{ cal cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

è dovuta per circa una metà al calore radioattivo prodotto nella crosta (0,84 . 10⁻⁶) e per un' altra metà (0,80 . 10⁻⁶) dal calore proveniente dalle regioni subcrostali della terra.

---

[1]) Come è noto diconsi *cratoni* o *cratogeni* quelle zone, generalmente estese, della crosta terrestre, continentali (alto cratone) o oceaniche (basso cratone), ove non avvengono più da lungo tempo, ovvero non sono mai avvenuti, movimenti orogenici. Per converso dicesi *orogene* una zona, generalmente ristretta, della crosta terrestre nella quale sono, o possono essere, in atto movimenti orogenici. Secondo l' opinione dell' A. (vedi *Vulcani*, già cit. Appendice) la differenza tra cratone e orogene non è già nella maggiore *rigidità* del primo rispetto al secondo, ma nelle condizioni di equilibrio isostatico e termico, nell' un caso verificate nell' altro no.

3. *Le temperature nella crosta terrestre.*

Abbiamo visto che la crosta continentale normale (alto cratone) è composta in media da circa 20 km di Sial I, 25 km di Sial II e 25 km di Sima con le relative conducibilità termiche $\lambda_1 = 8.10^{-3}$; $\lambda_2 = 6{,}5 \,.\, 10^{-3}$ e $\lambda_3 = 4{,}5 \,.\, 10^{-3}$ cal cm^{-2} sec^{-1}. Dal gradiente geotermico medio abbiamo dedotto che il flusso termico W_0, trasmesso all'atmosfera, è di $1{,}64 \,.\, 10^{-6}$ cal cm^{-2} sec^{-1} del quale una parte, e precisamente $0{,}84 \,.\, 10^{-6}$, deve ritenersi prodotto dalle sostanze radioattive nella crosta ed un'altra, e precisamente $W_s = 0{,}80 \,.\, 10^{-6}$, proviene dall' interno della terra.

In base a questi dati, ricordando che $t_0 = 10°C$, possiamo applicare le nostre equazioni [3'] e [4'], successivamente ai tre gusci Sial I, Sial II e Sima, aventi le caratteristiche e gli spessori dianzi riportati ed avremo l'andamento della temperatura nell'interno della crosta ed alla sua base. In questo caso il calcolo ha il carattere di un calcolo di verifica perchè senza tener conto dello spessore da noi già per altra via conosciuto del Sima, è proprio alla profondità di 70 km ed ad una temperatura di circa 1170°C che la curva delle temperature incontra la curva della temperatura di fusione del basalto (vedi fig. 1).

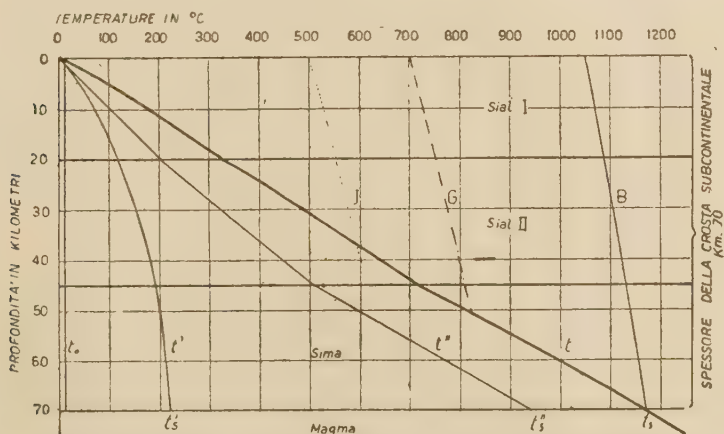



Fig. 1. — Andamento delle temperature nella crosta subcontinentale normale.

t_0 = temperatura di inversione del suolo

t' = temperatura dovuta alla produzione di calore radioattivo nella crosta

t'' = temperatura dovuta al calore proveniente dall' interno terrestre

t = temperatura effettiva nella crosta.

J = temperatura della formazione dell' *ichor*

G = temperatura di fusione dei graniti

B = temperatura di fusione del basalto.

Tentiamo ora di stabilire l'andamento delle temperature nella crosta continentale nella regione delle Alpi, ove — secondo i dati forniti dalla sismologia — lo spessore di Sial I è di circa 40 km e quello di Sial II di 20. Lo spessore del Sima, e con esso quello dell'intera crosta, non era fin qui conosciuto. Sembra lecito in tal caso ragionare nel modo seguente:

a. Secondo ogni probabilità l'ammassamento di Sial I in questa zona della crosta, che presenta lo stato postorogenetico, è dovuto in gran parte all'afflusso plastico di Sial dai margini della zona orogenetica; in parte minore esso proviene dall'accumulo di sedimenti, ove più ove meno metamorfosati, depositati nella geosinclinale.

b. Secondo le nostre vedute [1]) la parte inferiore del Sial I viene, durante l'orogenesi, « rastrellata » dalle sostanze volatili e dal calore, passando così man mano in Sial II, mentre la parte superiore viene invece arricchita in sostanze radioattive, a causa del comportamento geochimico di esse.

Ciò posto, ragionando in maniera analoga a quanto fatto per la crosta continentale normale, ma tenendo conto del raddoppiato spessore di Sial I, dello spessore di 20 km del Sial II e ammettendo, come è lecito, che anche in tal caso sia ristabilito l'equilibrio termico stazionario, si è calcolato lo

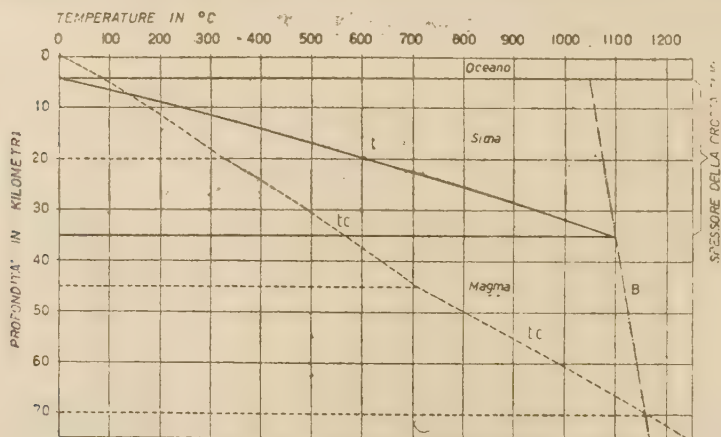



Fig. 2. — Andamento delle temperature (t) nella crosta sub Pacifica.

t_c = andamento delle temperature nella crosta subcontinentale normale (fig. 1).

B = temperatura di fusione del basalto.

andamento delle temperature. Si è così trovato che la fusione del Sima avviene a 71 km di profondità, cioè al medesimo livello relativo alla crosta continentale normale, se si tien conto del fatto che il livello medio della crosta alpina è almeno ad 1 km sul livello del mare. Ne è risultato altresì

[1]) Si vedano le opp. cit. a nota [2]) a pag. 4.

che in questa regione, il flusso termico totale $W_0 = 2{,}03 \cdot 10^{-6}$ cal cm^{-2} sec^{-1} è cioè maggiore di quella del continente normale; il che è di grande importanza per il bilancio termico della terra. In conseguenza il gradiente geotermico nelle Alpi dovrebbe essere minore di circa il 25 °/₀ di quello medio dei continenti, ed infatti ciò è in concordanza con le osservazioni fatte nelle grandi gallerie alpine.

Su altre conseguenze di natura petrogenetica non è possibile qui fermarsi: si rimanda pertanto alla memoria di prossima pubblicazione.

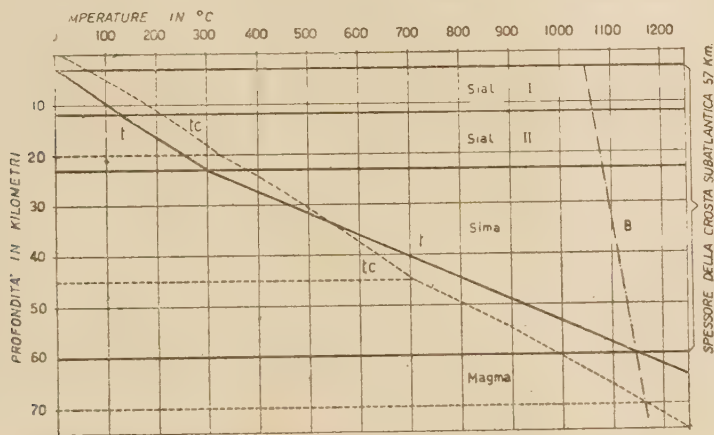



Fig. 3. — Andamento delle temperature (t) nella crosta sub Atlantica. Per i simboli vedi le didascalie delle figure 1 e 2.

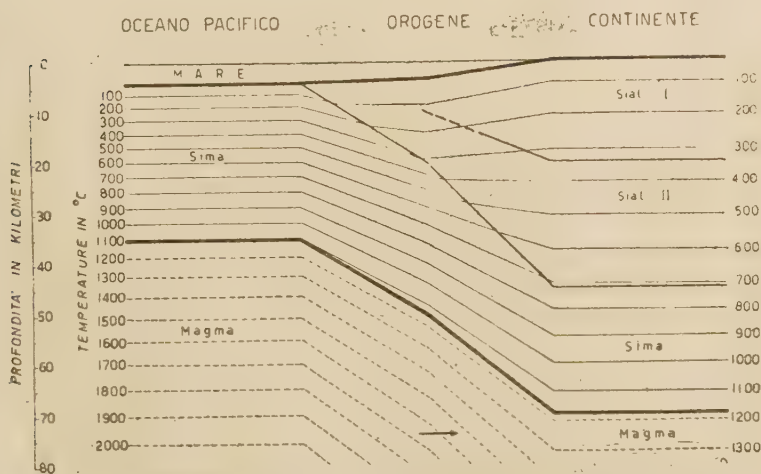



Fig. 4. — Sezione schematica della crosta terrestre tra un continente (alto cratone) e l'oceano Pacifico (basso cratone).

Analogamente a questi casi sono stati trattati quelli inerenti alla crosta nella zona dell'oceano Pacifico e dell'oceano Atlantico, basandosi sui dati a disposizione [1]). I risultati sono riportati nelle fig. 2 e 3; da essi si deduce che la crosta terrestre è spessa sotto l'oceano Pacifico (tipico basso cratone) appena 31 km e sotto l'Atlantico 57 km. Il che è una conferma, per altra via, del fatto che la zona dell'Atlantico non è un basso cratone, ma piuttosto, come è discusso nella memoria di prossima pubblicazione, un alto cratone «stirato». Alla medesima memoria rimandiamo per i dettagli dei calcoli e per più ampie discussioni dei risultati.

Di questi però non possiamo qui non menzionare il più importante: quello concernente i gradienti termici orizzontali. Se in base ai dati precedentemente ricavati sugli spessori della crosta terrestre costruiamo delle sezioni schematiche della crosta per esempio dal continente normale (alto cratone) all'oceano di tipo Pacifico (basso cratone) si rileva facilmente che, tranne per le zone più superficiali, esiste un gradiente termico orizzontale, crescente con la profondità, dall'oceano verso il continente (fig. 4). Esso raggiunge il valore massimo alla base della crosta continentale, di circa 1°C per chilometro: la differenza di temperatura a 70 km di profondità è difatti di circa 700° ad una distanza orizzontale di 500 ÷ 1.000 km.

L'esistenza di questo gradiente termico orizzontale ha conseguenze importantissime, perchè costituisce la causa prima dei fenomeni orogenici.

4. *Effetti dei gradienti termici orizzontali — Conclusioni.*

Da quanto precede risulta che nella zona magmatica, per uno stesso livello, le temperature del magma suboceanico sono maggiori di quelle del magma subcontinentale. Poichè la pressione è praticamente la stessa nell'uno e nell'altro caso, la densità del magma subcontinentale più freddo deve essere maggiore di quella del magma suboceanico del medesimo livello. L'equilibrio idrostatico è quindi disturbato in direzione orizzontale: il magma più leggero ha tendenza a spostarsi lateralmente in direzione del magma più pesante, cioè verso il continente, spostando a sua volta quello verso il continente e verso il basso. Si stabilisce così una corrente di convezione, lentissima ma molto efficace, diretta, nelle parti alte della zona magmatica, dall'oceano verso il continente, discendente sotto il continente diretta in senso opposto in profondità maggiori e risaliente sotto l'oceano.

Come è illustrato nella memoria di prossima pubblicazione, è proprio questa corrente che provoca, all'orlo tra il continente e l'oceano, la formazione di una geosinclinale e quindi l'inizio di tutto il complesso sviluppo

---

[1]) Della crosta sub Pacifica era fin qui ignoto lo spessore. Per la crosta sub Atlantica i dati geofisici davano un guscio di circa 20 km di Sial (senza netta distinzione tra il Sial I e II) e al disotto Sima di ignoto spessore.

di una orogenesi, come è stato già illustrato altrove [1]) e sul quale non è il caso di fermarsi in questa sede [2]).

In conclusione, lo studio della variazione delle temperature nella crosta terrestre, basato sui dati finora disponibili [3]), porta come è esposto nella memoria di prossima pubblicazione ai risultati seguenti:

1. Alla base della crosta terrestre — ove il Sima cristallizzato di composizione oceanitica passa gradualmente in Sima fuso, costituente la parte superiore della zona magmatica circumterrestre — regnano temperature oscillanti tra 1100 e 1200°C.

2. Lo spessore della crosta continentale (alto cratone) è circa 70 km; quello della crosta suboceanica è intorno ai 31 km per la zona dell'oceano Pacifico (basso cratone) e circa 57 km per quella dell' Atlantico.

3. Il flusso termico trasmesso all'atmosfera in superficie dalla crosta terrestre è in media $1{,}64 . 10^{-6}$ cal cm^{-2} sec^{-1}. Nelle zone orogeniche esso varia da un minimo di circa $0{,}4 . 10^{-6}$, verso la fine della fase geosinclinale, fino al massimo di circa $4{,}10^{-6}$, durante la fase di sollevamento.

4. L'orogenesi deve la sua causa prima ai gradienti termici orizzontali. Lo svolgersi dei fenomeni può spiegarsi in base a tutte le forze cosmiche e telluriche conosciute, senza far ricorso a cause o a forze misteriose.

Nel chiudere questa nota compio il grato dovere di ringraziare il mio collaboratore ing. Felice Ippolito, con il quale ho ampiamente discusso tutti

---

[1]) Rittmann A., *Vulcani, attività e genesi,* già cit. Appendice pag. 277 e segg.; vedi anche Geol. Rundschau, 1942. — Ippolito F., *Intorno ad una nuova teoria sulla origine del Sial e sull' orogenesi* Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, 1945.

[2]) La memoria, della quale diamo qui i risultati, illustra anche l'orogenesi con l'ausilio di numerose figure. È opportuno però già qui, a completamento della definizione di *magma* e *magma originnrio* date nella nota [1]) di pag. 4, riportare le definizioni seguenti, non ancora esplicitamente formulate nel vol. *Vulcani* avanti citato Dicesi *migma* una massa naturale silicatica dovuta a parziale fusione di rocce nella quale i relitti cristallini sono tanto predominanti rispetto alla massa fusa che la massa stessa, come tale, non è in grado di intrudersi come un magma. Dicesi *magma sintettico* il magma originario, o un suo differenziato, allorchè ha mutato la propria composizione per assimilazione di materiale estraneo. Dicesi *magma palingenico,* o semplicemente *palingene,* un magma di origine migmatica, proveniente cioè da un migma ulteriormente fuso e divenuto pertanto capace di intrudersi. *Magma ibrido* è un miscuglio di due o più magmi non direttamente derivati tra di loro. Da ciò discende che *magmatite* è una roccia proveniente dalla solidificazione di un magma; *migmatite* quella proveniente dalla solidificazione di un migma.

[3]) È ovvio che la conoscenza futura di dati più esatti e più numerosi porterà ad una correzione dei risultati conseguiti col presente studio.

gli argomenti trattati e che ha curato la redazione della presente nota e della memoria.

Ringrazio infine S. E. Leopoldo PICCARDI, Commissario dell'Istituto per la Ricostruzione Industriale (I. R. I.), che non solo ha concesso che io continuassi i miei studi teorici, accanto alla mia attività di Direttore del Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I., ma anzi mi ha incoraggiato a perseguirli.

Napoli, Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I., 16 novembre 1944.
Istituto di Geologia Applicata e di Arte Mineraria della R. Università.

INTORNO AD UNA NUOVA TEORIA SULL'ORIGINE DEL SIAL E SULL'OROGENESI

Nota 1 del dott. **Felice Ippolito**, *presentata dal socio* **G. D'Erasmo**

(Adunanza del dì 5 dicembre 1944)

Sunto. — L' A. fa una esposizione critica della recente teoria proposta da A. RITTMANN sull'origine del Sial, sulla petrogenesi e sull'orogenesi, mettendo specialmente in luce come essa tenti di comprendere in un'unica sintesi tutti i fatti geologici, petrografici e geofisici fin qui accertati, senza far ricorso a forze sconosciute. Esamina poi le obbiezioni formulate da J. H. F. UMBGROVE a taluni punti della teoria di RITTMANN, dimostrando perchè esse vadano respinte, e discute l'ipotesi di UMBGROVE sull'origine dei continenti e degli oceani, mostrando come essa sia inaccettabile. Nel concludere l'A. si augura che i geologi prendano confidenza con la teoria di RITTMANN, che per l'ampiezza e la semplicità dei suoi presupposti ben si presta come *ipotesi di lavoro*, per poterne così vagliare la sua veridicità.

Premessa [1]) — Fin dal 1938, in varie note pubblicate qua e là in tedesco e più recentemente in un volume ed in una ampia memoria in italiano, il geologo svizzero Alfredo RITTMANN è venuto sviluppando — talvolta anche in collaborazione con altri eminenti studiosi — tutta una serie di ipotesi, che meritano ormai nel loro assieme il nome di teoria, sulla origine del Sial e dell'energia vulcanica, sul plutonismo e vulcanismo, sull'interno terrestre e finalmente sulla distribuzione delle temperature nella crosta terrestre e l'orogenesi [2]).

---

[1]) Il presente lavoro era già compiuto nella estate del 1943, ma per i sopravvenuti avvenimenti politici è stato giuocoforza rimandarne la pubblicazione.

[2]) Vedi Nota Bibliografica in fine.

L' importanza delle nuove vedute, che profondamente modificano per alcuni aspetti le precedenti nostre cognizioni geologiche e geofisiche, l'averne io seguito fin dall' inizio gli sviluppi mercè l' opera di discussione e di divulgazione fattane da F. PENTA e poi riassunte, sotto la diretta guida dell' Autore, le linee fondamentali nell' Appendice all' edizione italiana del suo manuale di vulcanologia, mi hanno spinto a farne qui una rapida, ma, spero, esauriente esposizione critica, tralasciando bensì i problemi inerenti all' interno terrestre, sviluppati da A. RITTMANN e da W. KUHN e già illustrati in italiano da C. AQUILINA e da me.

Nello stesso tempo mi è parso opportuno prendere in esame talune obbiezioni mosse recentemente ad alcuni principî basilari della teoria da J. H. F. UMBGROVE [1]), e di conseguenza discutere le idee di questo autore sull'origine dei continenti e degli oceani, che mi pare offrano il fianco alla critica. Per quanto concerne i problemi della differenziazione petrografico-metallifera nei confronti delle nuove vedute sul plutonismo e vulcanismo, enunciate da CLOOS e RITTMANN (1939) e poi sviluppate da questo ultimo, già PENTA (1940) concluse che le linee generali della classifica dei giacimenti minerari, fin allora date da P. NIGGLI su premesse magmatiche, non contrastano con le nuove idee ed espresse l'opinione che queste potrebbero spiegare alcuni dubbi fondamentali lasciati insoluti dalla teoria della differenziazione.

La teoria di Rittmann. — La teoria di RITTMANN parte dall' esame critico di un gran numero di fatti geologici e geofisici fin qui accertati, dei quali cerca una spiegazione alla luce delle leggi della fisica e della chimica, senza far ricorso a forze sconosciute o a cause inesplicabili. Tali fatti sono principalmente: le caratteristiche magmatiche dei grandi tipi strutturali della crosta terrestre e la distribuzione regionale dei tipi di differenziazione magmatica; la costituzione della crosta terrestre secondo i più recenti dati della geofisica; la frequenza relativa delle rocce ignee; il carattere del vulcanismo. Esaminiamoli rapidamente.

Le ricerche della magmalogia indicano che nelle aree cratogeniche [2]),

---

[1]) UMBGROVE J. H. F., *Het Onstaan van continenten en Ocean.* Neederlandsch Aardrijkskunding Genootschap, s. 2; 1943.

[2]) Secondo le definizioni recentemente date da RITTMANN (1944) dicesi *cratone* o *cratogene* quella zona della crosta terrestre nella quale non sono ancora avvenuti, o non avvengono più da tempi remotissimi, movimenti orogenici. Si fa distinzione tra i primi detti *bassi cratoni*, rappresentati da parte dei fondi oceanici del Pacifico, dell' Indiano e dell' Artico ed i secondi, detti *alti cratoni*, rappresentati dai grandi zoccoli continentali: ad esempio Canadà, Africa, Russia, Asia Centrale, ecc. Per converso dicesi *orogene* una zona — in generale ristretta — della crosta terrestre nella quale sono, o possono essere, in atto movimenti orogenici.

sia di alto che di basso cratone, si hanno magmatiti della serie di differenziazione « atlantica »; negli orogeni invece si ha tipo di differenziazione nettamente « pacifica » ed infine nelle aree interne di una catena montuosa *(retroterra)* si ha differenziazione da « pacifica » a « mediterranea »; una distribuzione regionale, cioè, dei tipi di differenziazione come fu indicata da Becke, Prior, Niggli, Burri, Tröger, Peabock, Rittmann e Cloos.

Secondo i dati della geofisica, la crosta terrestre può oggi scindersi, con sicurezza, in tre gusci: Sial I, Sial II e Sima. Il Sial I è il guscio sialico superiore, costituito prevalentemente da rocce del tipo graniti-gneiss, con velocità di propagazione delle onde sismiche longitudinali, V = ∾ 5,6 km/sec, in media. Questo guscio non è continuo ed ha uno spessore che varia da 40 km ed oltre nelle zone orogeniche fino a scomparire del tutto nelle zone dei bassi cratoni. Il Sial II è un guscio intermedio, ove V = ∾ 6,3 km/sec, di costituzione controversa: secondo Rittmann si tratta di un materiale granitico, depauperizzato dell' eutettico quarzo-feldspato, di tipo dioritico-lamprofirico. Esso ha uno spessore variabile da 20-30 km a zero, nelle aree di basso cratone. Il Sima è all'incontro un guscio continuo, ove V = ∾ 7,9 km sec in media, costituito da magma originario [1]) solidificato e di spessore, secondo Rittmann, sotto i bassi cratoni (Pacifico) di circa 31 km e sotto i continenti di 25 km. È proprio sulla natura del magma originario che Rittmann imposta, come vedremo tra breve, il cardine della sua teoria.

Per quanto riguardi la frequenza relativa delle rocce ignee, come è stato illustrato chiaramente fra gli altri da R. A. Daly, vi è tra le plutoniti una grande predominanza di graniti e granodioriti (Sial) e tra le vulcaniti una, ancora più marcata, di basalti (Sima). Infine l'opinione della stragrande maggioranza dei vulcanologi è concorde nel ritenere che la sede dell' energia eruttiva è sovratutto nei gas e vapori disciolti nel magma; mentre le osservazioni vulcanologiche mostrano che il vulcanismo oceanico delle isole interne del Pacifico (basso cratone) è effusivo, quello continentale (alto cratone) misto e quello orogenico molto esplosivo.

Sulla base di questi fatti Rittmann sottopone a critica l'opinione della maggioranza degli studiosi che, ritenendo il Sial un prodotto di differenziazione del magma originario, vedevano in questo un basalto tholeiitico capostipite della serie di differenziazione « pacifica ». Egli infatti, tra l'altro, obbietta:

---

[1]) Secondo le più recenti definizioni di Rittmann si intende per *magma* « una massa naturale silicatica, contenente in soluzione sostanze facilmente volatili, fusa o in via di cristallizzazione, che costituisce unità geologiche sotto o dentro la crosta terrestre » e per *magma originario* (o *primordiale*) « quello che costituisce la zona subcrostale, perciò detta zona magmatica, o ne proviene senza aver subito alcun cambiamento nella sua composizione ». Dicesi inoltre *differenziazione* « un qualsiasi processo che sèpari da un magma uno o più magmi parziali di chimismo diverso; il magma che dà origine a differenziati dicesi *capostipite* ».

1. In tale ipotesi, sostenuta principalmente da N. L. Bowen e P. Niggli, rappresentando i graniti l'estremo prodotto di differenziazione del magma originario, dovremmo trovare nella litosfera enormi masse di plutoniti basiche (gabbri a olivina, duniti, etc.) di tipo « pacifico », rappresentanti i prodotti del consolidamento di quel magma. Orbene, anche ammettendo che tutto il Sima sia di natura tale da lasciare come ultimo prodotto di differenziazione graniti e rocce affini, la quantità di questi ultimi è sempre troppo grande rispetto a quella di tutto il Sima.

2. Se volessimo fare intervenire in questa differenziazione originaria anche la zona magmatica, nel senso cioè che gran parte della olivina e di altri femici sarebbero oggi ivi rifusi, si opporrebbero due difficoltà insormontabili: da un canto le correnti di convezione, e più ancora le correnti turbolenti dovute alla rapida degassazione, impedirono verso la superficie una differenziazione gravitativa in grande stile; dall'altro, anche postulando l'assenza di tali correnti, l'enorme viscosità regnante nella zona magmatica praticamente impedì, e impedisce tuttavia, in profondità qualunque movimento discendente di cristalli eventualmente formatisi [1]).

3. Sempre in questa ipotesi non si spiega perchè il vulcanismo oceanico di basso cratone, che attinge verosimilmente le sue lave direttamente dalla zona magmatica subcrostale [2]), dia alcalibasalti di tipo « atlantico ».

4. Se le plutoniti e le vulcaniti provenissero per differenziazione da un' unica massa fusa si dovrebbe avere una grande abbondanza di tipi intermedi e non, come dianzi si è detto, una così spiccata predominanza di prodotti acidi tra le prime e di basici tra le seconde. O in ogni caso, se si parte da un magma già basico — quale è quello tholeiitico — ad una grande abbondanza di rocce basiche dovrebbero corrispondere man mano quantità sempre minori di rocce più acide e non, come è in realtà, una minima quantità di rocce medie e di nuovo una gran quantità di plutoniti acide.

5. Se il Sial nacque dal magma originario « pacifico » per differenziazione esso deve aver formato un guscio continuo intorno a tutta la terra, e non si spiega perciò, ammenochè non si voglia ammettere l'esistenza di forze sconosciute, come esso sia oggi frantumato in vari blocchi.

6. Poichè anche oggi i continenti si accrescono per aggiunta di nuove masse sialiche, durante le orogenesi, bisognerebbe supporre che anche oggi

---

[1]) Un calcolo sommario della velocità di sedimentazione nel seno di una massa avente la viscosità della zona magmatica — viscosità calcolabile dalla velocità dei movimenti isostatici (ad es. in Scandinavia) e dalla reazione alle forze di marea — per un cristallo di olivina delle dimensioni di un cm, porta, come ordine di grandezza, che lo spazio percorso dall'inizio dei tempi geologici è di qualche centimetro.

[2]) Queste lave provengono da magma che non attraversa la crosta sialica — il Sial ivi manca — ma solo i propri prodotti alcalibasaltici già solidificati; talchè non vi è inquinamento.

esista, assieme al guscio alcalibasaltico, un magma primordiale « pacifico » intorno a tutta la terra; il che è molto poco probabile.

7. Anche ammessa questa ipotesi, non si spiega l'origine di questi due magmi.

8. L'ipotesi del magma originario « pacifico » e del Sial prodotto di differenziazione di esso non spiega molti altri fatti geologici; ad esempio, quello che il contenuto in sostanze radioattive dei graniti più antichi è molto più basso di quello dei graniti più recenti.

A queste obbiezioni, ognuna delle quali è di per sè capitale ed alle quali sarebbe agevole aggiungerne altre, è difficile dare risposta ed infatti una diretta difesa della ipotesi di un magma originario « pacifico », attaccata da RITTMANN fin dal 1936 e poi ancora più recentemente, manca, per quanto mi sappia, ancora oggi [1]. Vedremo più innanzi che UMBGROVE muove bensì delle obbiezioni, ma non a tutti gli otto argomenti di RITTMANN ora elencati.

RITTMANN invece ritiene con JAGGAR che il magma originario sia basaltico, e precisamente di tipo « atlantico », e che esso si differenzi ulteriormente nella direzione « pacifica » solo per effetto di assimilazione di Sial; ed è in ciò d'accordo anche con BARTH. Il primo Sial, in questo ordine di idee, dovrebbe la sua origine ai prodotti di alterazione della primitiva crosta alcalibasaltica della terra, sedimentati negli oceani primordiali, poi ultrametamorfosati [2], con apporto anche di sostanze volatili dal magma, ed infine emersi, per ragioni di isostasia, a formare le prime zolle germi di continenti, come vedremo tra breve e come è stato più ampiamente illustrato altrove. A questi primi nuclei continentali, già cratogenizzati o quasi, le successive orogenesi avrebbero apportato, e apportano tuttavia come si dirà in seguito, nuovi anelli di Sial. In altri termini il divenire geologico, in questa ipotesi, viene concepito come un processo continuo che, mediante l'orogenesi, trasforma i bassi cratoni (oceanici) in alti cratoni (continentali).

Poichè il Sial è quindi un prodotto di processi di ultrametamorfosi, in senso lato, e poichè — come si è detto dianzi — vi è tra le plutoniti una grande predominanza di graniti e granodioriti *(Sial)* e tra le vulcaniti una di basalti *(Sima)*, si è condotti a modificare completamente le precedenti

---

[1]) Il massimo teorico della differenziazione magmatica, il NIGGLI, ancora recentemente (Schweiz. Min. Petr. Mitteilungen, 1943) ribadisce il concetto che essa può spiegare teoricamente la derivazione dei graniti e rocce affini sia da un magma originario pacifico — quale egli ammette — sia per assimilazione di Sial da parte di un magma originario « atlantico »; egli però non ha ritenuto di entrare nel vivo della discussione a più riprese proposta da RITTMANN.

[2]) *Ultrametamorfosi* è usato qui in senso affatto generico ad indicare i processi di ultrametamorfosi in senso stretto, di migmizzazione e palingenesi, cui accennerò più oltre.

vedute sulla petrogenesi e a stabilire una differenza fondamentale tra vulcanismo tipico e plutonismo tipico, nel senso che il vulcanismo in generale è di origine magmatica e il plutonismo all'incontro è in grande predominanza di origine *migmatica* o *palingenica*. A questo punto è necessaria una digressione. Secondo la più recente definizione di *migma* data da RITTMANN [1]), le rocce tipiche del Sial (graniti, granodioriti, ecc.) possono avere origine migmatica, provenendo dalla parziale fusione e successiva solidificazione, con apporto di sostanze volatili dalle zone magmatiche più profonde *(transudati magmatici)*, di rocce preesistenti; ad es. da una arenaria può aversi un granito. Allorchè un migma fonde completamente o quasi esso diviene praticamente un magma: *magma palingenico* o *palingene* [2]). Pertanto quando diciamo che il vulcanismo tipico è di origine magmatica non intendiamo includere tra i magmi anche il palingene — che è un magma *sui generis* per quanto riguarda l'origine — ma solo il magma originario o i suoi derivati in senso lato: *magmi sintettici* e *magmi ibridi* [3]).

Questa definizione di migma è molto felice perchè se da un canto riafferma con precisione l'origine dei palingeni, dall'altro elimina numerose difficoltà, anche di ordine pratico, col dare effettivamente — secondo quanto indicò REINHARD — il nome di magma ad una massa naturale silicatica fusa, quale è il palingene, che, eccezion fatta per l'origine, ne ha tutti i caratteri. Essa elimina anche la difficoltà, rilevata già da PENTA (Period. Mineralogia, 1940), esistente nella confusa nomenclatura precedente allorchè si chiamava *palingenesi* il processo di ultrametamorfismo capace non solo di trasformare completamente aspetto e costituzione mineralogica di una roccia, ma di lasciare anche nel suo prodotto finale consolidato tutte le caratteristiche di un prodotto di solidificazione da una massa fusa; si intendeva per *migmatite* il prodotto — dopo consolidazione — dello stadio meno avanzato del processo di palingenesi e per *migma* il prodotto finale e non ancora consolidato della palingenesi. Perciò appunto PENTA proponeva

---

[1]) Dicesi *migma* « una massa naturale silicatica, dovuta a parziale fusione di rocce, nella quale i relitti cristallini sono tanto predominanti rispetto alla parte fusa — contenente in soluzione sostanze facilmente volatili — che la massa stessa, come tale, non è capace di intrudersi; *migmatite* è la roccia proveniente da solidificazione di un migma ». Con tale definizione il termlne *migmizzazione* deve indicare il processo di formazione di un migma, mentre *migmatitizzazione* quello di formazione di una migmatite, cioè il processo di solidificazione del migma.

[2]) Dicesi *palingene* o *magma palingenico* « un magma di origine migmatica, proveniente cioè da un migma ulteriormente fuso e pertanto divenuto capace di intrudersi ».

[3]) Dicesi *magma sintettico* « il magma originario, o un suo differenziato, che abbia mutata la propria composizione per assimilazione di materiale estraneo »; dicesi *magma ibrido* « il miscuglio di due o più magmi, non direttamente derivati tra loro ».

(loc. cit. pag. 113) o di chiamare *palingene* il prodotto della palingenesi, sostituendo questo termine a quello di migma, o di dare il nome di *migmatite* ai prodotti di consolidazione del migma. In base alle nuove più precise definizioni qui riportate, che sostanzialmente accettano ambedue le proposte di PENTA, il quadro della petrogenesi, pubblicato da RITTMANN assieme al CLOOS nel 1939, è venuto a modificarsi come alla tav. V del volume *Vulcani*, qui alligata [1]).

Stabiliti i fenomeni magmatici, come è stato qui accennato, RITTMANN ha affrontato il problema dell'orogenesi dandone nelle linee generali una soluzione che, per la prima volta, spiega soddisfacentemeute i fenomeni ed i legami complessi tra tettonica e magmatismo in senso lato, sulla base di fatti meccanici, geofisici e chimico-fisici. Ma è stato prima necessario riprendere le definizioni e stabilire la differenza tra cratone e orogene. Quando infatti si consultano i trattati di Geologia generale si ha l'impressione che la questione sia da tempo risolta e che i due concetti siano già perfettamente definiti. Ciascuno sa infatti che, comunemente, si intende per cratone un blocco, una zona tabulare, una massa, una parte della crosta terrestre, continentale (alto cratone) o oceanica (basso cratone), la quale sia forte, irrigidita, stabilizzata, consolidata, corrugata, che reagisce alle sollecitazioni tettoniche fratturandosi, fagliandosi, sollevandosi o abbassandosi in blocco (movimenti detti di *epeirogenesi*) o al massimo con piegature regionali dolcissime, durante le quali la coltre sedimentaria viene appena lapidificata diageneticamente, mai però metamorfosata. All'incontro si intende per orogene una striscia, un «canale», che rappresenta una zona labile della crosta terrestre, una zona debole, piegabile, plastica, che reagisce alle sollecitazioni tettoniche piegandosi, accavallandosi, corrugandosi, carreggiandosi, mentre i sedimenti vengono lapidificati diageneticamente o addirittura metamorfosati [2]). La differenza sarebbe quindi, secondo queste definizioni, nella maggiore *rigidità* del cratogene rispetto all' orogene. Orbene se si riflette che le zone cratoniche sono costituite o da Sial e da Sima (alti cratoni: continentali) o quasi esclusivamente da Sima (bassi cratoni: oceanici), e che la crosta terrestre, in qualunque suo punto, da pochi chilometri di profondità in poi, è già *plastica* per le condizioni ivi regnanti di pressione e di temperatura, si vedrà che nè in una differenza di materiale — chè

---

[1]) Erano già in avanzato corso di pubblicazione il volume *Vulcani* e la presente memoria allorchè NIGGLI nella nota già citata propone di riportare il nome di *migmatite* al significato originario di SEDERHOLM, cioè di riferirlo a quelle rocce che mostrano una tessitura magmatica e metamorfica grossolanamente mista. Non è qui il caso di esaminare l' opportunità di una tale proposta che verte, in fondo, su una mera questione di nomenclatura.

[2]) Le definizioni di RITTMANN, date precedentemente in nota, sintetizzano in sostanza i medesimi concetti, tranne per quanto riguardi *rigidità*.

l'orogene è anche esso costituito come gli alti cratoni da Sial e da Sima — ne in una diversità di stato fisico [1]) è la diversità di comportamento alle sollecitazioni tettoniche, bensì — e qui è la novità del concetto introdotto da RITTMANN — in una diversa condizione di equilibrio: *la crosta cratonica è in perfetto, o quasi, equilibrio isostatico e termico* [2]), *la crosta orogenica è in disquilibrio; l'orogenesi tende a ristabilire le condizioni di equilibrio.*

L'interessante studio sulle distribuzioni delle temperature nell'interno della crosta terrestre, in correlazione con quanto la geofisica e la petrografia han stabilito sulle condizioni e sulla natura della crosta, ha portato infatti alla conclusione che la crosta, alla cui base regna una temperatura di circa 1200°C, è spessa sotto i continenti normali (alti cratoni) circa 70 km e sotto gli oceani da 30 km (Pacifico) a 55 circa (Atlantico). Nelle zone marginali dei continenti si ha pertanto sotto la crosta un gradiente orizzontale di temperatura che crea uno spostamento di masse, una lenta corrente di convezione, e conseguentemente un disturbo dell'equilibrio isostatico nella crosta. L'esistenza di questi squilibri non basta però da sola, come vedremo, a produrre una orogenesi se non sono anche in atto concomitanti condizioni locali.

Non illustrerò qui nei particolari il meccanismo dell'orogenesi; per maggiori dettagli si vedano i lavori di RITTMANN citati in Appendice. In sostanza il processo può schematizzarsi come segue. La corrente magmatica subcrostale, diretta dall'oceano verso il continente, crea nell'orogene una depressione che viene compensata sia dall'afflusso di altro magma dai lati sia specialmente da un abbassamento della crosta: formazione di una *geosinclinale*. Sotto il continente si genera, all'incontro, una compressione per cui il continente stesso si solleva, viene sempre più attaccato dall'erosione e quindi la conseguente sedimentazione nella geosinclinale si sviluppa in pieno e questa si approfondisce sempre più, mentre la sua parte inferiore incomincia a fondere. Intanto la corrente magmatica esercita una trazione sotto

---

[1]) Sul concetto della rigidità del cratone e della plasticità dell'orogene è fondata la *Orogentheorie*, ricca peraltro di felici intuizioni, di KOBER il quale afferma che il senso dell'evoluzione orogenica è «dalla plasticità alla rigidità». Anche in una recente pubblicazione di STILLE si trova ripetuto il medesimo concetto della maggiore *rigidità* del cratone rispetto all'orogene e quindi viene affermato che la terra, invecchiando, andrebbe sempre più irrigidendosi. Concetto non condiviso da G. B. DAL PIAZ (Rend. Soc. Mineral. It., 1941) il quale avverte infatti che tutto lascia presumere che la «flessibilità» della crosta non è diminuita nel corso dei tempi geologici.

[2]) Nel senso che la distribuzione delle temperature nell'interno della crosta è stabilizzata in modo tale che non vi siano gradienti laterali di temperatura. (Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat., s. 4ª, XIII, Napoli, 1945).

la crosta, già sollecitata dall'abbassamento, e provoca la formazione di fratture abissali attraverso le quali si apre la via il magma, dando luogo al noto vulcanismo di geosinclinale (fig. 1) di tipo « atlantico » all'inizio, ten-

Fig. 1.

dente poi, per assimilazione di materiale sialico, al « pacifico » (magmi sintettici). Mediante questo vivace vulcanismo — che contribuisce anche esso all'ulteriore approfondimento della geosinclinale per l'accumulo di lave

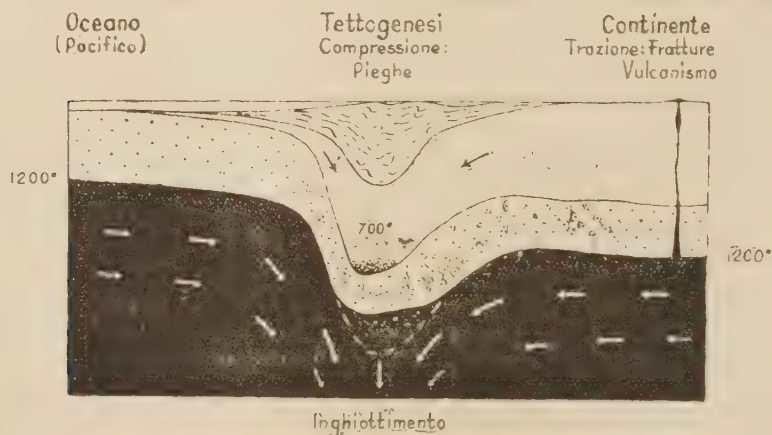



Fig. 2.

pesanti in superficie o verso la superficie — e l'inizio di fusione alla base della crosta, il magma si degasa, si raffredda, aumenta di densità e quindi tende a scendere generando così una corrente magmatica discendente sotto l'orogene, che prevale sulla primitiva corrente orizzontale e poi la interrompe del tutto.

La discesa del magma pesante causa un abbassamento ancora più accelerato della crosta: questa viene, in altri termini, risucchiata dalla zona magmatica, « inghiottita » — dice RITTMANN — e si genera nel contempo lo afflusso plastico di Sial e di Sima dai lati verso la zona di inghiottimento (fig. 2). Questo fenomeno provoca una compressione delle parti più alte della geosinclinale e con ciò il corrugamento dei sedimenti, accompagnato altresì da accavallamenti e ricoprimenti superficiali, con scorrimenti. Intanto il Sial e poi anche i sedimenti più profondi della geosinclinale inghiottiti vengono riscaldati *(termometamorfismo)*, parzialmente *(migmizzazione)* o totalmente fusi *(palingenesi)* con apporto di sostanze volatili del magma, e, così alleggeriti, si trovano in squilibrio isostatico con le masse adiacenti

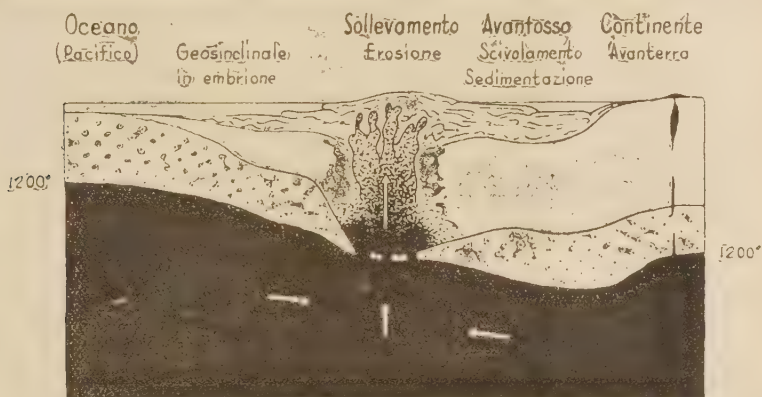



Fig. 3.

più pesanti. I palingeni tendono ben presto ad intrudersi verso l'alto *(diapirismo)*.

Lo squilibrio isostatico delle masse sialiche, aumentate anche di volume, e il diapirismo portano ad un sollevamento generale di tutto l'orogene (fig. 3), accompagnato da metamorfosi dei sedimenti corrugati [1]). Per compensare il sollevamento si formano, ai lati dell'orogene, delle *fosse* — quasi geosinclinali di secondo ordine — verso le quali slittano, scivolano [2]) i sedimenti sollevati non ancora lapidificati e nelle quali si depositano i detriti provenienti dall'erosione delle zolle sollevate *(flysch, molasse)*. Per effetto del sollevamento tutto l'orogene, già sottoposto a sforzi di compressione durante l'inghiottimento, è ora sottoposto a trazione; il Sima alla base

[1]) Dinamometamorfismo per l'azione del sollevamento e metamorfismo di contatto per l'intrusione dei grossi plutoni diapiri.

[2]) In questa fase notevolissima importanza tettogenetica ha la gravità nel senso indicato da vari autori. Per una ampia sintesi, con bibliografia, si veda DAL PIAZ G. B. (Atti R. Acc. Scienze di Torino, v. 77, 1942).

viene frantumato e parzialmente fuso e il magma si mescola ai palingeni dando luogo a ingenti formazioni di magmi ibridi. Intanto verso la superficie le masse sollevate vanno raffreddandosi finchè, quando la viscosità è sufficientemente cresciuta, la crosta reagisce alle sollecitazioni di trazione più facilmente fratturandosi che con deformazioni plastiche [1]). Le fratture aprono la via ai magmi ibridi e sintettici, formatisi in profondità, che danno luogo ad enormi plutoni e che talvolta successivamente giungono fino in superficie. Lentamente poi l'erosione peneplanizza il rilievo così formatosi che si cratonizza saldandosi, come nuova zolla sialica, al cratone continentale ai cui margini si era formata la geosinclinale. Intanto i fenomeni, se le condizioni necessarie e sufficienti per lo sviluppo di una orogenesi permangono, si spostano verso l'oceano con la formazione di un'altra geosinclinale (fig. 3) e l'inizio di un nuovo ciclo orogenetico [2]).

Come appare chiaro anche dalla breve descrizione che precede non basta l'esistenza degli squilibri per provocare la formazione di una orogenesi. Nell'Appendice al volume *Vulcani* è infatti illustrato che condizioni necessarie e sufficienti per lo sviluppo di una orogenesi sono:

1. L'esistenza di una zona in cui siano in atto squilibri tali da provocare la formazione di una geosinclinale.

2. L'esistenza di una forte sedimentazione nella geosinclinale stessa, tale che venga facilitato il progressivo abbassamento del fondo di questa sotto il peso dei sedimenti.

3. L'esistenza di una coltre sialica abbastanza potente da giungere, durante il successivo approfondimento della geosinclinale, a profondità tali da permettere la formazione di ingenti quantità di migmi e palingeni che producono poi, con il diapirismo, la spinta verso l'alto che ristabilisce l'equilibrio.

La teoria dell'orogenesi di Rittmann presenta, rispetto alle altre precedentemente emesse [3]), due notevoli caratteristiche. In primo luogo essa si basa soltanto su fenomeni noti e forze conosciute: infatti la causa prima

---

[1]) Con l'aumento della viscosità (η) non aumenta di pari passo la rigidità (μ) talchè, per la relazione di Maxwell $\eta = \mu\tau$, aumenta il tempo di rilassamento (τ). Perciò le sollecitazioni agenti in un tempo minore di τ producono una rottura della massa plastica, come se questa fosse un corpo solido.

[2]) Nasce così la migrazione dei fenomeni orogenetici, nel senso già indicato dal van Bemmelen col nome di *undazione*.

[3]) Per una rassegna critica delle varie ipotesi e teorie orogenetiche si veda, fra l'altro, la memoria pubblicata anni or sono da M. Gortani (*Scientia*, XLIII, 1928) il quale appunto concludeva rilevando come nessuna di esse paresse accettabile e come nondimeno, tra le tante, talune avessero tale fondamento da potere essere valide a spiegare fenomeni locali.

dell'orogenesi, cioè la formazione della geosinclinale, è negli spostamenti di masse nella zona magmatica subcrostale; l'energia necessaria a compiere il *lavoro* dell'orogenesi è fornita dal calore proprio terrestre — eredità dei tempi pregeologici o di origine radioattiva —, dalla tensione di vapore dei gas disciolti nel magma e subordinatamente dall'energia solare (alterazione, erosione), dalla gravità (sedimentazione, scivolamenti liberi, ecc.) e da tutte le altre fonti di energia tettonica [1]), senza postulare l'esistenza di forze incognite. In secondo luogo essa spiega, come ho dianzi accennato e come si deduce dalle memorie citate, la quasi totalità dei fatti geologici e geofisici [2]), come ad esempio: la correlazione tra cicli tettonici e cicli magmatici [3]); in che consista la differenza che si nota tra gli orli continentali circumpacifici e mediterranei, caratterizzati da fenomeni orogenetici e vulcanismo esplosivo, e quelli circumatlantici ove mancano orogenesi e vulcanismo; a che sia dovuta la dorsale medio-atlantica; che significato petrogenetico assumano i lamprofiri e così via. Inoltre essa tien conto, nei singoli campi di validità, comprendendole in una più vasta sintesi, di precedenti ipotesi geologiche come la teoria delle oscillazioni di Haarmann, dell'undazione di van Bemmelen, della deriva dei continenti verso ovest nel senso di Wegener, della isostasi secondo la formulazione di De Marchi, delle correnti subcrostali di Ampferer, della differenziazione magmatica di Niggli, del plutonismo e vulcanismo dell'autore medesimo e di Cloos, della granitizzazione di Backlund e di Eskola, delle migmatiti di Sederholm, Scheumann e Wegmann ed altre. Talchè, come ha scritto Cloos nella *Geologische Rundschau* (1942) in « maniera felicissima il pensiero del « mineralogista che ha ben presenti le leggi della chimica e della fisica, in « uno con l'esperienza vulcanologica personale e con il gigantesco materiale « proveniente dalla profonda conoscenza della tettonica alpina concorrono « in unità di intenti alla erezione, su solida e larga base, di una piramide « dal nitido profilo che si innalza arditamente verso le più alte mete. Per« tanto in considerazione della complessità dei rapporti reciproci del pro-

---

[1]) Ripetendo quelle già citate, le fonti dell'energia tettonica sono: attrazione lunare e solare, irradiazione solare (fonti cosmiche); gravità, rotazione terrestre, radioattività, processi chimici, calore proprio della terra, tensione di vapore dei gas magmatici (fonti telluriche).

[2]) Esorbita dai limiti della presente memoria, dare una spiegazione di questi fatti, secondo la teoria di Rittmann. Rimando pertanto alle trattazioni originali, citate nella Nota Bibliografica.

[3]) Una recente pubblicazione di Stille (1940) mette in rapporto cicli tettonici e cicli magmatici, senza bensì dare le ragioni del perchè il vulcanismo geosinclinale (*iniziale*) abbia il suo carattere tra « atlantico » e « pacifico », quello postorogenico (*tardogeno*) generalmente « pacifico » fino a « mediterraneo » e quello cratonico (*finale*) prevalentemente « atlantico ».

« blema e della grandezza della mèta, non si può certo vedere nell'ecclet-
« tismo del procedimento una debolezza, bensì una garanzia di solidità ».

Infine l'orogenesi, in questa teoria, perduto ancor più il suo significato di *diastrofismo*, è un processo che si sviluppa lentamente attraverso i tempi geologici: ha la sua incubazione nella lunghissima fase di geosinclinale che impegna più periodi geologici; si esplica più rapidamente, sempre in senso relativo, nelle fasi di inghiottimento e all'inizio del sollevamento, per poi tendere di nuovo con estrema lentezza alla peneplanizzazione mentre il sollevamento diventa sempre più lento e tende asintoticamente a finire Questi ultimi movimenti sono tanto lenti che ancora oggi — mentre le Alpi sono in avanzata fase e l'Imalaya in piena fase di sollevamento, mentre gli Appennini probabilmente rappresentano già una avanfossa sollevata di una più antica catena tirrenica ora abbassatasi — taluni massicci quasi peneplanizzati dell'orogenesi erciniana, che ebbe il suo pieno sollevamento alla fine del Paleozoico, mostrano tuttavia, per deficienza di isostasia, la loro ultima tendenza al sollevamento. Ciò permette di adombrare già un'altra interessantissima conclusione, ancora non esplicitamente formulata, e cioè che l'ipotesi della *contemporaneità delle fasi orogenetiche* di STILLE perde gran parte del suo valore; infatti col progredire e l'estendersi degli studi geologici è necessario aggiungere sempre nuove *fasi* orogenetiche al già lungo elenco. L'orogenesi è un processo continuo, in ogni periodo della storia geologica della terra, ove con maggiore ove con minore intensità.

INTORNO AD UNA NUOVA TEORIA SULL'ORIGINE DEL SIAL E SULL'OROGENESI

Nota II del dott. **Felice Ippolito**, *presentata dal socio* **G. Ippolito**

(Adunanza del dì 5 giugno 1945)

Obbiezioni di Umbgrove e loro discussione. — Come appare chiaro da quanto precede, alla base della teoria ora riassunta è il problema del magma originario e dell'origine del Sial; pertanto è con grande attenzione che vanno studiate e discusse le obbiezioni recentemente mosse proprio a questo lato delle idee di RITTMANN del geologo olandese J. H. F. UMBGROVE [1]). Questi in sostanza non è d'accordo con RITTMANN nè sulla natura del magma originario, nè sull'origine del Sial e quindi implicitamente nega

[1]) A proposito della memoria di UMBGROVE già citata, mi è grata qui l'occasione di ringraziare l'amico dr. C. E. BURCKHARDT, che ha voluto gentilmente aiutarmi nell'interpretazione del testo olandese.

anche tutte le altre conseguenze, come l'orogenesi, benchè da lui non ancora direttamente conosciute.

Le obbiezioni di Umbgrove si possono raggruppare in questo modo.

a. L'origine delle zolle germi dei continenti, per sollevamento isostatico dei primi sedimenti granitizzati nel fondo degli oceani primordiali, presuppone nella teoria di Rittmann l'esistenza di un primordiale rilievo, con oceani e continenti simatici. Ora questo primordiale rilievo « viene da Ritt- « mann attribuito ad una deformazione della crosta terrestre in seguito a « un disturbo dell'equilibrio. Questo punto di partenza necessario, senza il « quale lo sviluppo delle idee successive non è possibile, rimane inspiegabile. « Ciò è una specie di *Deus ex machina* che rende in complesso tutta la « ipotesi poco soddisfacente, tanto più che si deve richiedere la formazione « di rilievi forti e durevoli per spiegare la formazione di una pila di sedi- « menti primordiali potenti ».

b. L'ipotesi di Rittmann non spiega altri punti, quali la distribuzione antipodale dei continenti e degli oceani, l'esistenza di tre livelli particolari[1] per i continenti e i fondi marini, la strana struttura dei fondi dell'Atlantico e dell'Indico.

c. Non è esatto quanto afferma Rittmann, cioè che ammettendo un magma originario « pacifico », si giunge a conseguenze insostenibili, perchè egli (Umbgrove) dimostrerà come, con un certo ragionamento, tali conseguenze insostenibili spariscono.

Esaminiamo separatamente i tre gruppi di obbiezioni ora accennati.

Il primo tocca effettivamente la teoria nel suo punto più delicato: la formazione degli oceani e dei continenti primordiali. Rittmann ne dà spiegazione nel modo seguente. Allorchè la terra si rivestì del primitivo guscio alcalibasaltico era ancora circondata dall'atmosfera primordiale, costituita da tutta l'acqua esistente oggi sulla terra, da anidride carbonica, cloro, fluoro, zolfo, anidride solforica, ossigeno, azoto, ecc.: atmosfera che pesava all'incirca 300 volte più dell'attuale con una temperatura di oltre 1.000°C. In tali condizioni la crosta simatica, uniformemente distribuita intorno alla terra, sovente però spaccata e attraversata da nuove masse magmatiche che ne ricoprivano vasti tratti, fu attaccata da una vivace alterazione ad opera dell'atmosfera primordiale. Quando la temperatura dell'atmosfera raggiunse il valore della condensazione del vapor d'acqua a quella pressione (300 atm), cioè all'incirca la temperatura di 350°, si iniziò la condensazione dell'acqua e quindi sopravvennero le prime imponenti piogge, rapidamente evaporantesi, che si ripeterono con sempre maggiore intensità; finchè col passare del tempo la temperatura non raggiunse il valore di 100° o quasi, mentre la pressione sulla superficie scese fino ad 1 atm. Secondo Rittmann « la formazione dell'idrosfera provocò una variazione del momento « d'inerzia della terra e pertanto dovè conseguentemente aversi un adatta- « mento del geoide alle nuove condizioni. Questo adattamento si attuò in

« un primo momento con una opportuna disposizione dell' idrosfera stessa « sul geoide; ma in seguito anche le masse magmatiche plastiche sottostanti « alla crosta si adattarono alle nuove condizioni e si formarono così i primi « abbassamenti e rilievi: gli oceani primordiali e i continenti primordiali » (*Vulcani*, pag. 239-40).

Si rileva da questo passo che RITTMANN il problema dell' origine dei continenti e degli oceani primordiali se l' è posto e ne ha adombrata la soluzione nel modo ora detto. È però anche evidente che una spiegazione del tutto esauriente egli non la dà: UMBGROVE ha pertanto il merito di avere individuato questo punto debole della teoria, perchè in effetti il fenomeno del passaggio dell' atmosfera primordiale alla idrosfera più l' atmosfera attuale meriterebbe di essere analizzato un pò più da vicino. È indubbio però che le variazioni dell' energia e del momento d' inerzia, dovute allo spostamento delle masse verso il centro di rotazione, nonchè il diverso spessore della idrosfera alle varie latitudini per effetto della forza centrifuga e le enormi maree possono aver provocato sulla crosta — allora molto più sottile dell' attuale e quindi ancor più deformabile — lievissime ingobbature. Ed indubbiamente disuniformità locali verso la superficie esistevano già, a causa di effusioni da fratture, a causa di lievi diversità nel processo alterativo, a causa di maree magmatiche subcrostali, come del resto UMBGROVE stesso ammette [1]). In quanto poi all' entità delle ingobbature, definite « dolci » da RITTMANN, è bene notare che perchè i fenomeni di dilavamento e sedimentazione dei primi prodotti di alterazione avvengano ne bastano inizialmente di lievissime, dell' ordine di qualche km, cioè praticamente trascurabili rispetto al raggio terrestre; sarà poi l' isostasia a continuare l' approfondimento ed il sollevamento, man mano che progrediscono sedimentazione ed erosione.

Sulla base di quanto precede non può pertanto essere accettata l' affermazione di UMBGROVE che la formazione dei continenti e degli oceani primordiali sia « *una specie di Deus ex machina* » perchè vuoi la variazione del momento d' inerzia del geoide, indicata da RITTMANN, vuoi la variazione dell' energia e gli altri fattori che ho dianzi elencati, possono aver provocato « dolci abbassamenti e rilievi ». La causa, o meglio, le cause dunque esistono; non è però ancora chiarito [2]) — ed in ciò è valida l' obbiezione di UMBGROVE — come il fenomeno voluto da RITTMANN avvenga meccanicamente.

Nel secondo gruppo di obbiezioni UMBGROVE rileva che la teoria di RITTMANN non spiega la distribuzione antipodale dei continenti e degli oceani, l' esistenza di tre livelli particolari per i continenti e i fondi marini, la

---

[1]) Vedi più innanzi a pag. 279.

[2]) A questo proposito mi riservo di pubblicare prossimamente i risultati di uno studio che ho in corso sull' argomento: studio restato in sospeso per la difficoltà di procurarmi la bibliografia nelle attuali contingenze belliche.

strana struttura del fondo dell'Atlantico e dell'Indico. Esaminiamo questi tre argomenti separatamente. In effetti la teoria di RITTMANN non spiega la disposizione antipodale dei continenti e degli oceani, ma — è lecito domandarsi — v'è qualche teoria orogenica che la spiega? A quanto mi consti, nessuna; ed anche la teoria dello stesso UMBGROVE, che tra breve esamineremo, non ne dà spiegazione esauriente. D'altro canto è anche opportuno notare che la disposizione antipodale non è assoluta, perchè vi sono fra l'altro due importanti eccezioni: la prima che l'America del Sud è per oltre 1/3 della sua superficie agli antipodi della zona continentale dell'Asia orientale, delle grandi isole della Sonda e della Malesia; la seconda che l'oceano Indiano ha ai suoi antipodi la parte centrale dell'oceano Pacifico. Infine non mi pare sia il caso dare eccessiva importanza a talune coincidenze geo-morfologiche quale questa, o ad esempio quella della forma grossolanamente triangolare con la quale terminano verso sud i continenti, perchè tali facili osservazioni possono sovente condurre a semplicistiche illazioni. In quanto ai « tre » particolari livelli per i continenti ed i fondi marini di cui parla UMBGROVE, vi è anzi tutto da osservare che realmente i risultati delle ricerche di KRÜMMEL, TRABERT e KOSSINNA mostrano l'esistenza di « due » livelli particolari nella crosta terrestre: l'uno continentale a circa 100 m sul mare, l'altro oceanico tra 3.000 e 4.000 m di profondità. Col dire « tre » livelli, UMBGROVE vuol forse ulteriormente distinguere la differenza di profondità media tra Atlantico e Pacifico. Orbene dai posteriori lavori di RITTMANN anche questo punto è chiarito; infatti agli alti cratoni (continenti normali), ai bassi cratoni (es. Oceano Pacifico) e agli alti cratoni « stirati » (es. Oceano Atlantico) corrispondono tre particolari livelli medi, rispettivamente di 100 m sul mare, 4.000 e 3.000 m di profondità; il che d'altro canto non inficia i risultati delle ricerche di KRÜMMEL, TRABERT e KOSSINNA perchè questi ultimi due livelli differiscono di poco tra loro rispetto al terzo e passano gradualmente l'uno nell'altro [1]). Infine col dire « strana struttura dei fondi oceanici dell'Atlantico e dell'Indico », UMBGROVE si riferisce, forse, a quella a zolle, a blocchi più alti e più bassi. Ebbene, il fenomeno dello « stiramento » della crosta suboceanica, esistente secondo RITTMANN per la zona dell'Atlantico, è appunto in grado di provocare un tale effetto, come fu già indicato da WEGENER per il fondo del mare Egeo.

Il terzo gruppo di obbiezioni che muove UMBGROVE alla teoria consiste, come ho accennato di sopra, nel rigettare taluni degli argomenti di RITTMANN tendenti a dimostrare che se si ammette un magma originario « pacifico », che abbia dato quali estremi prodotti di differenziazione graniti e

---

[1]) Sia detto qui incidentalmente che con la teoria di RITTMANN trova altresì solida spiegazione il fatto — finora enigmatico — del diverso comportamento rispetto all'orogenesi delle coste atlantiche e di quelle pacifiche, nonchè l'esistenza della tanto discussa dorsale medio-atlantica.

rocce affini del Sial, o si arriva a conseguenze insostenibili o si è costretti a postulare l'esistenza di forze sconosciute. In particolare però degli otto argomenti da noi precedentemente elencati (vedi pagg. 3 e 4), UMBGROVE non prende in considerazione che soltanto tre e precisamente quelli da me indicati con i numeri 5, 6 e 7. Questo fatto non va trascurato perchè ognuno degli otto argomenti è di per sè solo probativo; pertanto negligerne la maggior parte, e specie i primi quattro, rende inefficace o poco solida tutta la discussione di UMBGROVE. In particolare, per il punto 5 UMBGROVE dice che vi ritornerà sviluppando la sua teoria e per il 7 che le difficoltà ad esso inerenti « spariscono quando si consideri un diverso punto di partenza ». Pertanto la discussione di queste due obbiezioni sarà compresa in quella delle idee di UMBGROVE intorno all'origine dei continenti e degli oceani. Per il punto 6 egli si limita soltanto ad affermare che esso è fondato su di un concetto sbagliato perchè « è affatto ingiusto il concetto dell'accrescimento dei « continenti per l'aggiunta delle zone orogeniche da noi più o meno ben « conosciute ». All'incontro si può obbiettare che il concetto dell'accrescimento dei continenti per l'aggiunta di nuovi anelli di Sial, cioè di nuovi orogeni, è oggi verificato in molte zone della terra, come ad esempio in Europa ad opera, fra gli altri, dello STILLE e nell'America del Nord fin dal secolo scorso a seguito delle ricerche di HALL e DANA; pertanto non basta, secondo me, affermare il contrario, ma bisognerebbe che l'Autore ci indicasse con precisione gli elementi che gli permettono di rigettare in blocco i risultati del lavoro di oltre un secolo di tutta una schiera di valenti geologi.

L'origine dei continenti e degli oceani secondo J. H. F. UMBGROVE. — Dopo aver passato rapidamente in rassegna, con intendimento critico, le varie ipotesi geologiche di WEGENER, DU TOIT, BUCHER e WADE — che sembra accostarsi alquanto alle idee di RITTMANN [1]) — UMBGROVE espone la sua teoria sull'origine dei continenti e degli oceani partendo dallo stadio primordiale della terra, in cui tutto il materiale è « allo stato fuso ». La fig. 4 rappresenta le cinque fasi in cui l'Autore divide l'evoluzione pregeologica del nostro pianeta. Nella prima (fig. 4, A) il materiale è allo stato fuso e incomincia a differenziare gravitativamente: i materiali leggeri si accumulano alla superficie [2]). Successivamente (fig. 4, B) la differenziazione

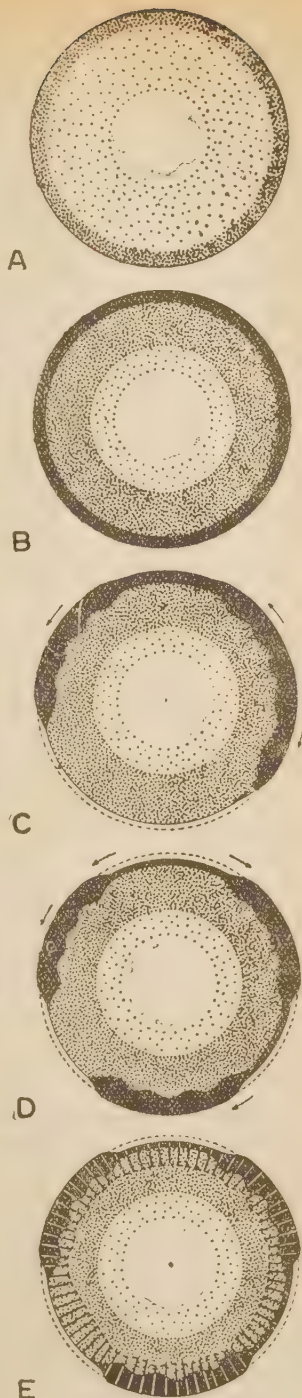
[1]) Secondo quanto si deduce dall'esposizione di UMBGROVE — chè finora mi è stato impossibile procurarmi la memoria originale — WADE parte anche egli dal concetto che il guscio originario esterno della terra fosse Sima; quando si iniziarono la condensazione dell'acqua e le prime piogge, si formò — a causa della più rapida rotazione della terra — un anello equatoriale di acqua, sì che le zone polari emersero come continenti primordiali. Ivi i prodotti di alterazione divennero Sial, e quindi zolle germi di continenti, e poi incominciarono a spostarsi verso l'equatore.

[2]) L'Autore avverte esplicitamente che egli trascura di occuparsi se il mate-

è così progredita che si trovano sovrapposti vari gusci a peso specifico diverso dei quali gli interessano solo i due più superficiali: quello esterno, più leggero, costituito da materiale più ricco di silice (Sial) che racchiude un guscio più povero di silice (Sima). Contemporaneamente la zona più esterna si raffredda. UMBGROVE esclude però giustamente che si sia formata una crosta omogenea di spessore costante, pensando piuttosto alla formazione di zolle di dimensioni varie che man mano si saldavano: « una omogeneità « completa è stata necessariamente disturbata da « ragioni esterne; pensiamo ad esempio, all'eccen- « tricità dell'orbita ed alla posizione obliqua del- « l'asse terrestre rispetto all'azione delle forze di « marea » [1]. Nella fase seguente (fig. 4, C) l'Autore mostra che l'unico modo nel quale possono essersi formati degli aumenti di spessore continentali è corrugamento ed accavallamento del Sial, che intanto si va sempre più raffreddando ed irrigidendo. In conseguenza la crosta si raccorcia e quindi in alcune zone viene del tutto a mancare il Sial (oceano Pacifico). La distribuzione di questi primi nuclei di Sial era probabilmente asimmetrica e comunque non in equilibrio, donde una tendenza dei continenti a migrare (fig. 4, D) per stabilire una distribuzione antipodale di continenti ed oceani. A causa di questo movimento talune parti della crosta primordiale, e quindi anche dei continenti primordiali, sono state « stirate »: si sono così formate le zone con minore spessore di Sial (es. oceano Atlantico). Intanto durante questi fenomeni, il

Fig. 4.

riale pesante si accumula al centro della terra o in una zona più superficiale, come affermano nella loro recente trattazione KUHN e RITTMANN.

[1]) Come ho già precedentemente avvertito (vedi pag. 276), qui UMBGROVE indica disuniformità della crosta primordiale, concordando perciò con RITTMANN che vede in queste — comunque formatesi — le cause per la formazione degli oceani e dei continenti primordiali.

raffreddamento dei gusci esterni della terra ha raggiunto lo stadio in cui si è formata una crosta rigida, la quale inviluppa tutta la terra ed è diventata così spessa che ulteriori migrazioni dei continenti in grande stile non sono più possibili (fig. 1, E). Da questo momento la situazione, in grandi linee, è la stessa di oggi.

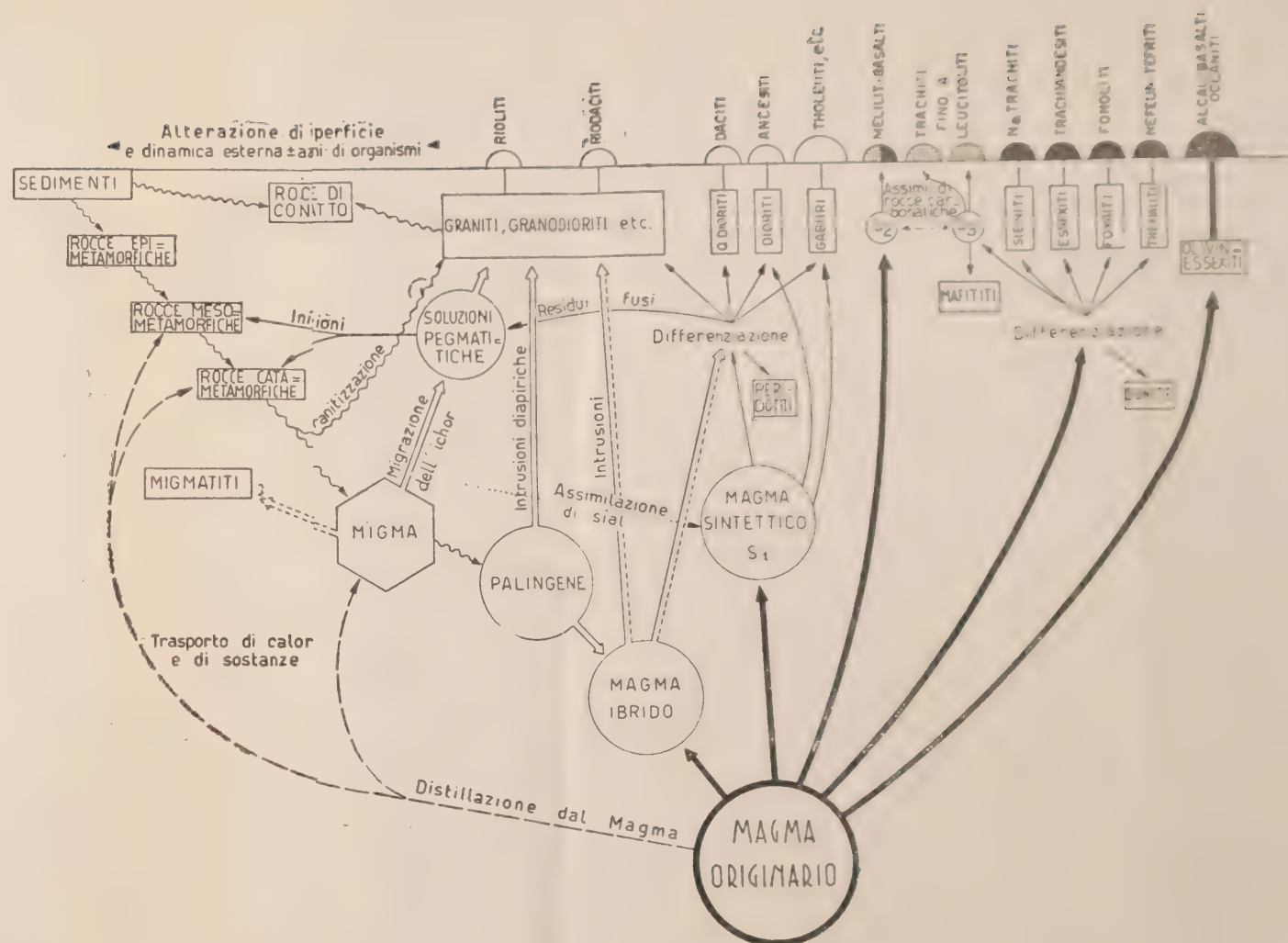
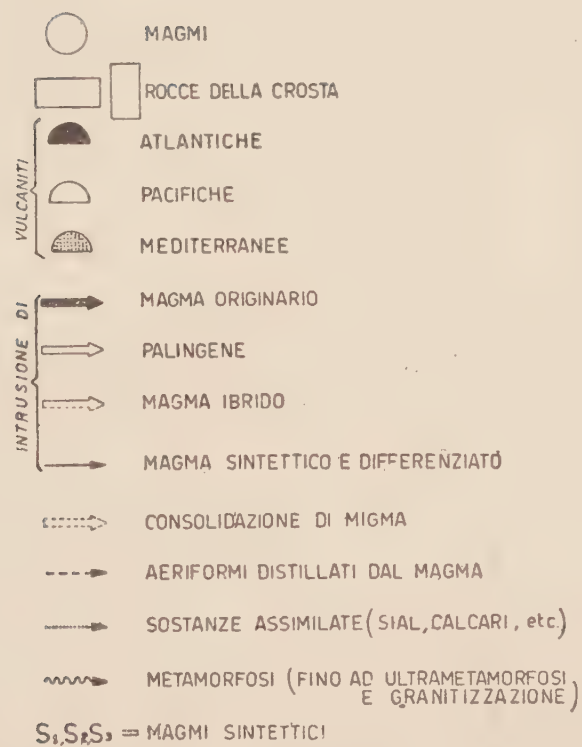
Ma quali sono le forze che hanno potuto causare il corrugamento della crosta primordiale e la formazione dei continenti primordiali? si domanda UMBGROVE; e risponde « le stesse forze endogene che agiscono dalla forma-« zione della crosta rigida ad oggi, cioè i processi subcrostali ». Stabilire il tipo di questi processi, agenti oggi come nei tempi precambrici, sarà ancora per lungo tempo, egli afferma, uno dei problemi fondamentali della geologia. Per il momento sembra che la più adatta ipotesi di lavoro sia quella di concepire una oscillazione periodica del Sima subcrostale, cioè di concepire la terra come un astro in pulsazione. Infatti una contrazione e una espansione alternativa del Sima subcrostale spiegherebbero, dice UMBGROVE senza peraltro accennarci come, direttamente o indirettamente tutti i fenomeni geologici e finanche, attraverso le mutazioni climatiche, l'evoluzione degli organismi.

Questa, esposta brevemente — sovente con le medesime parole dell'originale — l'ipotesi ehe avanza UMBGROVE per spiegare l'origine dei continenti e degli oceani. Essa, come lo stesso suo autore dichiara, è una nuova forma della « ipotesi della permanenza », nella quale rimane l'immagine delle zolle migranti, ma soltanto per i primi tempi precambrici; parimenti essa accetta l'origine della crosta atlantica per stiramento e contemporaneo abbassamento, ma anche questo fenomeno viene rimandato ai tempi precambrici.

Queste idee, come già ho accennato all'inizio, mi sembra offrano il fianco alla critica. UMBGROVE presume una differenziazione originaria pregeologica di tutto il corpo terrestre, che avrebbe portato alla formazione di vari gusci di diversa densità; il più esterno di questi è il Sial, quello immediatamente al di sotto il Sima; gli altri sottostanti non hanno interesse per la trattazione. In altri termini egli presume che, analogamente a quanto l'esperienza ci dice avvenga in un altoforno, la differenziazione di tutta la terra sia stata completa e che il Sial, quale parte più leggera, sia venuto all'esterno, non altrimenti di come una scoria leggera galleggia sulla massa fusa di una colata metallica.

Idee di questo tipo, generalmente ammesse fino a pochi anni or sono sono però state recentemente sottoposte ad una acuta critica da parte di KUHN e RITTMANN. Il ragionamento seguito da questi scienziati è molto vasto ed abbraccia tutto lo sviluppo pregeologico della terra; qui — poichè UMBGROVE esplicitamente dichiara di non volersi occupare di quanto riguardi l'interno terrestre — mi limiterò a riassumere soltanto quella parte che più direttamente interessa la differenziazione completa del corpo terrestre, e

SCHEMA DELLE LINEE FONDAMENTALI DELLA PETROGENESI

— LEGGENDA —

che è stata più recentemente oggetto di una nuova trattazione di KUHN (Naturwissenschaften, 1942). Questi infatti osserva che l'errore precedentemente commesso è stato quello di aver voluto assimilare i processi di raffreddamento della terra a quanto avviene in un altoforno dove effettivamente si realizza, con temperatura tra i 1.200 e i 1.500°C ed a pressione atmosferica, una separazione delle fasi ed una differenziazione gravitativa di esse. Temperature come queste esistono infatti nella terra, a circa 100 km di profondità, ma sono ivi combinate con circa 30.000 atm di pressione; il che impedisce affatto ogni differenziazione gravitativa. Infatti, anche ammettendo per un momento che tutto l'idrogeno esistente in origine nel corpo terrestre [1]) sia sfuggito nello spazio e che sia realizzata una separazione delle 3 fasi (silicati fusi, ossidi e solfuri fusi, metalli), la differenziazione gravitativa delle fasi separatesi dipende essenzialmente dalla viscosità della massa fluida, che aumenta fortemente con la pressione. Secondo le osservazioni geofisiche più recenti è accertato che la terra ha in media una viscosità di 10^{20} *poise* e che a 100 km di profondità, in piena zona magmatica, ove regna una temperatura di circa 1.300°, la viscosità non può essere minore di 10^{18} *poise*; valore questo che esclude in modo assoluto la possibilità di una differenziazione gravitativa. D'altro canto anche in tempi molto più remoti, con temperature molto più alte di oggi, la differenziazione non ha potuto aver luogo: infatti, poichè KUHN ha dimostrato che per tutte le sostanze occorrono 100 o più gradi di aumento di temperatura per abbassare la viscosità del fattore 10, avremmo bisogno di temperature elevatissime, molto maggiori di quelle ammissibili per la terra anche nei tempi pregeologici, per abbassare la viscosità di un fattore 10^{20} e tali temperature, come è ovvio, non permetterebbero nemmeno una separazione delle fasi.

Ma oltre questa, altre gravi difficoltà si oppongono all'accettazione delle idee di UMBGROVE. Ad esempio non si riesce bene a comprendere perchè il Sial avrebbe dapprima avuto una tendenza ad agglomerarsi in una certa zona, lasciando scoperto un vasto tratto di Sima (oceano Pacifico) e poi invece si sarebbe rotto in due o tre pezzi che si allontanano, « stirando » il Sial intermedio, e perchè la crosta si sarebbe irrigidita solo dopo questi avvenimenti. L'autore tuttavia dimentica che la crosta non è rigida, tanto è vero che spostamenti continentali sono in atto ancora oggi; non spiega come possono avvenire, dopo questo irrigidimento verificatosi alla fine dei tempi precambrici e che avrebbe impegnato tutta la crosta, altre imponenti orogenesi come la caledoniana, l'erciniana, l'alpina; nè chiarisce in alcun

---

[1]) KUHN e RITTMANN ammettono per la terra una origine solare e quindi una composizione originaria eguale a quella del sole (Vedi IPPOLITO F., Annali Università di Napoli, 1945). I ragionamenti però cui accenniamo nel testo valgono anche se si prescinde da questa ipotesi.

modo quale sia l'origine dei grandi plutoni granitici posteriori all'irrigidimento di Sial e di Sima (fig. 4, E).

Infine dove, secondo me, l'ipotesi è affatto insostenibile è nella scelta delle forze che avrebbero prodotto i primordiali imponenti corrugamenti e le primitive derive continentali. L'autore indica sì, come abbiamo veduto di sopra, come forze agenti i processi magmatici subcrostali, ma egli stesso riconosce che è impossibile stabilire il tipo di questi, in atto oggi come nei tempi precambrici, proponendo per ora, quale ipotesi di lavoro, una oscillazione periodica del Sima subcrostale che porterebbe a concepire la terra come un astro pulsante. Dove e come, è lecito peraltro chiedersi, hanno agito questi processi subcrostali e perchè avrebbero avuto dapprima una tendenza ad agglomerare il Sial e poi a suddividerlo in blocchi? Come nasce da una pulsazione della terra e come è ad essa collegato un processo di questa natura? I processi magmatici subcrostali genericamente indicati dall'Umbgrove quali forze agenti, senza specificare quali siano e come agiscano, furono invocati anche da Wegener quali causa della deriva dei continenti; nondimeno lo stesso riconobbe a più riprese, che essi sono insufficienti da soli a spiegare l'entità dei fenomeni orogenici. Entriamo così nel campo di forze sconosciute, cioè proprio in quello da cui Rittmann si è voluto allontanare col formulare la sua teoria solamente sulla base di forze cosmiche o telluriche conosciute.

In quanto all'ipotesi della pulsazione terrestre non è qui il caso di entrare in merito, tanto più che essa non è illustrata con tanta diffusione da poter iniziare una discussione. Soltanto, alla stregua di quanto è noto sulla natura degli astri pulsanti, non mi pare che si tratti ivi di processi che abbiano comunque attinenza con fenomeni tellurici.

Conclusioni. — Per concludere, l'ipotesi avanzata da Umbgrove per spiegare l'origine dei continenti e degli oceani, partendo da presupposti diversi da quelli da cui è partito Rittmann per la costruzione della sua teoria, urta — come ho tentato di chiarire dianzi — contro notevoli difficoltà e conduce a postulare l'esistenza di forze sconosciute. D'altro canto non dobbiamo dimenticare quanto abbiamo precedentemente notato (vedi pag. 278), cioè che il geologo dell'Aia non ha confutato tutti gli argomenti con cui Rittmann combatte l'idea del magma originario a carattere « pacifico », anzi ne ha trascurati alcuni fondamentali. Di fronte all'ipotesi di Umbgrove dobbiamo pur dirlo, la teoria di Rittmann mostra di possedere una maggiore solidità, sia perchè spiega un numero molto più grande di fatti geologici, geofisici e petrografici, sia perchè tiene nel debito conto la massima parte delle ipotesi geologiche precedentemente emesse, tentando di comprenderle in un'unica più vasta visione. Non si vuole con ciò negare il valore che hanno le obbiezioni, e nel presente caso quelle teste esaminate di Umbgrove, per meglio comprendere taluni particolari aspetti del problema,

ma specialmente per il fatto che esse costringono al riesame di tutta la teoria per vedere se abbiamo virtù di cangiarla o modificarla in conseguenza della critica attraverso cui è passata e, in ogni caso, per ripossederla in modo più saldo.

Con la breve esposizione che precedentemente ho fatta della teoria cercando di mettere in luce come essa utilizzi tutti i documenti forniti dalle varie scienze geologiche e li rielabori liberamente alla luce delle cognizioni elementari della fisica e della chimica; con la discussione di talune obbiezioni; ma principalmente con l'aver tentato di mostrare come negandone il punto fondamentale, cioè la natura del magma originario e l'origine del Sial, l'ipotesi di Umbgrove è costretta a chiamare in campo forze sconosciute — mi auguro soltanto di aver indicato una serie di problemi che meritano tutta l'attenzione degli studiosi.

Del resto nella teoria di Rittmann — compiuta per quanto riguardi i problemi magmatici fondamentali: origine del Sial, petrogenesi, etc. — l'orogenesi è ancora esposta in forma preliminare e se essa riesce, come tentativo di sintesi, a spiegare meglio di alcun altra precedente il maggior numero di fatti geologici, petrografici e geofisici, non si vuole con ciò nemmeno lontanamente dire che essa li spieghi tutti e si lusinghi quindi di dare ciò che in filosofia si direbbe un «sistema chiuso». Essa però, per l'ampiezza e la semplicità dei suoi presupposti, si presta ottimamente ad essere utilizzata come *ipotesi di lavoro* e come tale, con l'applicarla via via ai vari fenomeni geologici osservati e studiati, se ne potrà provare l'utilità e la validità. Credo pertanto desiderabile che tutti i geologi e particolarmente quelli che non si interessano di geologia teorica, ma — seguendo la più antica e nobile tradizione di questa scienza — non vogliono andare «oltre il martello», prendano confidenza con la teoria di Rittmann, perchè è proprio attraverso i loro lavori monografici di geologia speciale e locale che le teorie orogeniche ricevono il vaglio dell'esperienza ed esplicano la loro vera funzione che è sempre e solamente nella capacità di far nascere altre ipotesi ed altre teorie, più ampie, nella perpetua dialettica della scienza, che è la sua stessa vita.

Napoli, Centro Ricerche Geominerarie dell' I. R. I., 13 ottobre 1943.
Istituto di Geologia Applicata e di Arte Mineraria della R. Università.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Il presente lavoro era originariamente completato da una bibliografia di ben 68 numeri. Per ragioni tipografiche, connesse con le contingenze del momento, è stato giuocoforza rinunciare alla pubblicazione di questa bibliografia, che e però presso l'autore, dattiloscritta, a disposizione di ch unque voglia consultarla. Oltre i brevi richiami dati nel testo, ci limitiamo qui ad indicare le pubblicazioni di Rittmann riguardanti gli argomenti trattati.

Cloos H. und Rittmann A. — *Zur Einteilung und Benennung der Plutone.* — Geol. Rundschau, XXX, H. 5, 1939.

Kuhn W. und Rittmann A. — *Über den Zustand des Erdinnern und seine Entstehung aus einem homogen Urzustand.* - Geol. Rundschau, XXXII, H. 3, 1941.

Rittmann A. — *Über die Herkunft der vulkanischen Energie und die Entstehung des Sials.* — Geol. Rundschau, XXX, H. 1/2, 1938.

— — *Die Entstehung des Sials und die Herkunft der vulkanischen Energie.* - Geologie & Mijnbouw, n. 6, 1939.

— — *Bemerkung zur « Atlantis-Tagung » im Frankfurt in Januar 1939.* — Geol. Rundschau XXX, H. 3/4, 1939.

— — *Mechanismus und Systematik der Vulkanischen Tätigkeit.* Geologie & Mijnbouw, n. 5, 1939.

— — *Zur Thermodynamik der Orogenese.* — Geol. Rundschau, XXXIII, H. 7/8, 1942.

— — *Vulcani attività e genesi.* — E.P.S.A. (Ed. Politecnica S. A.), Napoli, 1943.

— — *Le temperature nella crosta terrestre e l'orogenesi.* — Rend. R. Acc. Scienze Fis. Mat., s. 4ª, XIII, Napoli, 1945.

L' Eruzione vesuviana del marzo 1944

I. — *I prodotti piroclastici.*

Nota del prof. **Antonio Parascandola,** *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 2 maggio 1944)

Sunto. — L' Autore premette una breve cronistoria dell' eruzione che, a parer suo, fu una eruzione terminale, hawaijana, esplosiva ed effusiva. Ne esamina i prodotti piroclastici e ne ricava conclusioni per il meccanismo oltre che per l'origine e il colore delle ceneri, e per la provenienza dei cristalli liberi nel lapillo.

Nel marzo 1944 il Vesuvio ha dato un' eruzione molto importante sia dal lato dinamico che dal lato dei suoi prodotti piroclastici. Io mi occuperò molto più di questi; nondimeno ritengo opportuno premettere alcune brevi riassuntive nozioni dei fenomeni dinamici.

A) *Quadro riassuntivo delle diverse fasi dell' eruzione.*

Più che descrivere i fenomeni nel modo come si svolsero giorno per giorno, preferisco presentarli nelle diverse fasi successive, le quali possono riassumersi così:

1ª fase: *fase preparatoria* (giorni 13, 14, 15 marzo).

Franamenti del conetto; conseguenti ostruzioni del condotto vulcanico; apparente calma al cratere per effetto della temporanea ostruzione; esplosioni disostruenti. Qualche efflusso intercraterico.

2ª fase: *fase ignea, effusiva, terminale, hawaijana* (giorni 16 a 21 marzo).

Continua il crollo del conetto. Dai crepacci vengono fuori efflussi lavici a grosse ondate che, dopo aver invaso la piattaforma craterica, ne sorpassano i bordi e si riversano nell' atrio. Successive rifuse ne aumentano la portata, specialmente in una colata precipitata dal bordo settentrionale che dall' Atrio si versa nel Fosso della Vetrana, e poi si dirige ai paesi di Massa e San Sebastiano che finisce per investire.

Un altro ramo discende lungo il pendio occidentale, quasi parallelamente al binario della Funicolare, poi, costeggiando la base del Gran Cono, invade il binario della ferrovia che dall' Osservatorio va alla stazione inferiore della Funicolare; il rigurgito del flusso lavico disceso pel Fosso della Vetrana investe il piazzale della centrale elettrica della ferrovia, arriva

a contatto dell' edifizio, si addossa e si affaccia all'imboccatura del capannone delle carrozze.

Il 21 marzo il fronte lavico della centrale elettrica era quasi fermo, appena impercettibilmente avanzava scrollando la parete anteriore del sacco di scorie e mostrando la lava interna incandescente al rosso.

3ª fase: *fase ignea esplosiva, terminale, hawaijana* (giorno 21 e prime ore del 22 marzo).

Svuotatasi notevolmente la parte superiore del condotto vulcanico per effetto degli efflussi lavici, si estrinseca la enorme tensione degli aeriformi del magma sottostante. In prima, ed anche concomitantemente alla fase effusiva, si ebbero intense esplosioni stromboliane; ma in questa terza fase si realizzarono gigantesche *fontane di magma*, che si alzavano a centinaia di metri sulla platea craterica, ricadendo in gran parte nel settore di nord-est. Queste fontane furono nove, almeno le più imponenti. Il cratere diventò un lago di fuoco.

4ª fase: *fase pseudovulcaniana* (ore pomerid. del giorno 22 e tutto il 23 marzo).

Conopidi di vapori, di lapilli, arene e ceneri si alzano, con esplosioni violenti, dall'ambito del cratere; ma i materiali non sono più incandescenti. Le ceneri più leggiere sono portate dal vento in località molto lontane; arene e lapilli piombano nei paesi situati a sud-est del vulcano sotto l'azione di forte vento superiore di nord-ovest. Valanghe di ceneri precipitano lungo il Gran Cono.

Imponenti scariche elettriche scattano dai pini di lapilli e di ceneri.

5ª fase: *fase cinerea* (giorni 24 e 25 marzo).

I detriti si vanno più assottigliando e permane la caduta di ceneri; ma in gran quantità da far sospettare una origine magmatica oltre a quella detritica. Queste ceneri magmatiche sembrano attribuibili a ingenti quantità di particelle di magma strappate dagli aeriformi che, con forte tensione, vengono fuori dalla parte più profonda del condotto.

6ª fase: *fase finale* (giorni 26 e 27 marzo).

Ultimi conati spingono fuori qualche nugolo di ceneri. Crolli dell'orlo craterico, ceneri ivi depositate originano valanghe interne ed esterne al Gran Cono. L'eruzione è finita.

Eruzioni di questo tipo il Vesuvio aveva dato nell'aprile 1649, nel maggio-giugno 1698, nel marzo 1759, nel maggio 1806 e nel giugno 1929.

Questa del 1944 è stata, senza dubbio, parossismale, e pare che abbia chiuso il periodo eruttivo vesuviano iniziatosi nel 1913.

A queste notizie, credo opportuno aggiungere alcune altre che possono essere anche utili allo studio dell' eruzione.

Tra il materiale grigio scuro cinereo proiettato in queste esplosioni si notavano frequenti grossi proietti lavici di magma nuovo, i quali descri-

vevano altissime tipiche traiettorie paraboliche che lasciavano dietro una densa scia di vapori giallo-verdastri.

Dietro la colonna cinerea, e ben distinta da questa, si osservano alte, dense, bianche volute di vapori.

Questo duplice fenomeno mi richiamava alle stupende figure del HAMILTON nella sua grandiosa opera « Campi Phlegrei » [1]).

Ivi una riproduzione delle esplosioni per il parossismo eruttivo vesuviano dell'agosto 1779 fa distintamente vedere queste traiettorie paraboliche di proietti lavici, che si ebbero specialmente nel mattino del 9 agosto, tra dense masse di vapori.

Le volute bianche fuoriuscenti dal Gran Cono lasciavano supporre che il fumo doveva sprigionarsi direttamente dal magma venuto a contatto diretto con l'atmosfera, fluidissimo, proveniente forse da una bocca di efflusso indipendente da quella per la quale si manifestavano l'esplosioni, e da cui la nube cinerea innalzava il materiale piroclastico nuovo, non che quello antico che veniva sottratto volta per volta alla piattaforma craterica dallo impulso dell'esplosione. Quindi si aveva l'impressione che nel cratere vi fossero due bocche, una esplosiva, anteriore, sita dove in antecedenza era il conetto, ed un'altra effusiva formatasi posteriormente; ciò non è nuovo negli annali del nostro vulcano. La presenza di queste due colonne, cinerea e bianca, ci ricorda anche quanto PLINIO [2]) ci dice della nube « *candida interdum, interdum sordida et maculosa* ».

Così anche nell'eruzione del Monte Nuovo, come ci vien raccontato da PIETRO GIACOMO da TOLEDO [3]): « *il fumo era in parte nero ed in parte bianco. Il primo era più oscuro delle stesse tenebre, il secondo era così bianco come il più bel cotone* ».

Nel giorno 21 aprile, ascendendo al Gran Cono Vesuviano, a metà del pendìo, avvertii l'odore del cloro. Sul cratere avvertii la presenza del cloro, dell'acido cloridrico, dell'acido solfidrico. Sulle pendici del Gran Cono rinvenni cristalli liberi di augite, specialmente presso la stazione inferiore della funicolare. Grosse bombe erano sparse sulle pendici; gomitoli di lava osservai sulle colate. Minerali vari ho rinvenuto: come ematite in laminette basali rosso sangue sulle lave presso la chiesa di Massa invasa dalla lava; abbondanti campi di clorammonio, formazione di silvestrite, di eritrosidero; ma ciò sarà argomento di altra trattazione [4]).

---

[1]) HAMILTON W., *Campi Phlegraei*, Napoli, 1776. — *Supplement to the Campi Phlegraei*. Naples, 1779, tavola III.

[2]) Lib. VI, Epist. XVI.

[3]) PIETRO GIACOMO da TOLEDO, *Ragionamento del terremoto del Nuovo Monte dell' aprimento di terra in Pozzuoli nell' anno 1538 e delle significazioni di essi*. Napoli, Sultzbach, 1539, ripetuto da Miccio Scipione nella vita del Vice Re.

[4]) Nella riferita chiesa di Massa la lava penetrò per la porta, riempì la Chiesa,

Dopo l'eruzione oltre che a Torre del Greco anche nei pozzi di Resina e di Portici è stata abbondante l'emissione dell'anidride carbonica, che dal terreno vegetale si sprigionava qui e lì più o meno copiosa.

Nella località Salute, nel ricovero della villa Rocca, lo strato di anidride carbonica raggiungeva l'altezza di un uomo; bassi animali, come conigli ad es., morivano per lo sprigionarsi di tale gas dal suolo. I piccoli bambini dovevano essere portati sulle braccia perchè la loro respirazione diveniva penosamente affannosa e impossibile se appiedati [1]).

La conflagrazione vesuviana del marzo corrente anno si è quindi manifestata con una vasta effusione lavica terminale e con un imponente fenomeno esplosivo.

Oggetto di mie indagini sono stati tanto i prodotti venuti a luce in questa eruzione, sia lavici che piroclastici, e le sublimazioni, nonchè quanto ho potuto direttamente osservare sullo svolgersi dei fenomeni sia per visione diretta che per le relazioni degne di fede e debitamente controllate.

In questa mia prima nota io mi occupo del materiale piroclastico lanciato dalle esplosioni, quale quello che più facilmente, per le rimozioni che subisce, va disperso e mescolato con altri prodotti, e quindi più difficili ed incerte diventano col tempo e le ricerche e le conclusioni.

B) *I prodotti piroclastici.*

Potrebbe ritenersi, *a priori*, che i prodotti piroclastici di una fase erut-tiva prevalentemente esplosiva, siano differenti tra loro, sia secondo le successive esplosioni, sia secondo i differenti settori della zona circostante al vulcano in cui essi possono essere distribuiti o dalla direzione delle esplosioni stesse o dalla direzione del vento.

Si realizza così una selezione dei prodotti che non avverrebbe se essi cadessero tutti in uno stesso settore.

Guidato da questo criterio iniziai le mie ricerche e le mie inchieste.

Ed ora credo opportuno far conoscere agli studiosi le notizie da me raccolte in diversi paesi vesuviani colpiti dalla caduta dei proietti piroclastici, e le osservazioni che su questi ho potuto compiere con i mezzi a disposizione, concessimi dalle attuali contingenze, essendo stato l'Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli tra quelli che hanno subìto i danni più gravi dalle operazioni belliche, riservandomi di trattarne ancora in seguito, non appena si potrà disporre di adeguati mezzi d'indagine.

---

si fermò contro la parete dell'abside; per l'alta temperatura la cupola ebbe calcinata la malta e nettamente crollò per metà. Le pietre di tufo giallo presentavano il tipico colore del tufo « cotto » dalle lave.

[1]) Verso i primi del dicembre 1944 in tale località è poi quasi scomparsa l'emissione dell'anidride carbonica.

I paesi nei quali quasi esclusivamente caddero i prodotti delle esplosioni furono quelli situati nel 2° quadrante. Il lapillo grosso arrivò fino a Battipaglia; a Pertosa cadde cenere e minuta sabbia. La cenere si spinse fino a Bari e a S. Maria di Leuca dove coprì il suolo di uno strato ben visibile tal che cancellava l'aspetto dei pavimenti delle terrazze; ivi la biancheria distesa ad asciugare divenne color cenere, gli agrumi e la verdura ne rimasero danneggiati; e la più fine pervenne anche oltre l'Adriatico, ma evidentemente trasportata dal vento.

I fenomeni e i prodotti piroclastici a S. Giuseppe Vesuviano.
(N 80° E) (distanza dell'asse craterico circa km. 6,5).

Nel martedì, 21 marzo, alle ore 17, il Vesuvio fece sentire i primi boati. Incominciarono a cadere sul suo fianco orientale scorie e masse incandescenti. Si udì durante un'ora un rumore simile a quello di un macchinario in movimento in un grandioso stabilimento. Verso le ore 22 si sentì un boato prolungato che durò circa dieci minuti. Seguì poi una relativa calma.

Mercoledì, 22 marzo, alle ore due, ricominciarono i boati; il primo durò dalle 2 alle 2,15. Alle ore 4 si ebbe un altro boato che durò circa venti minuti. Durante la notte cadde lapillo minuto. Si ebbero poi diverse scosse sismiche, intervallate da 15 a 30 minuti. Alle ore 10 cadevano scorie della grossezza di circa 5 cm. di diametro; e ciò per un quarto d'ora. Si susseguivano quindi, ad intervalli di due o tre minuti, poche scorie del diametro massimo di 15 centimetri. Dalle 11,30 alla sera calma completa. Ma alle ore 20 incominciò a piovere cenere nerastra mista ad acqua e qualche granuletto di lapillo. Tale pioggia durò circa un'ora e trenta. Alle 22 ricominciò la pioggia del lapillo; il cielo era completamente coperto da una nube nerissima. Forti scariche elettriche si osservavano sul Cono vesuviano. Il lapillo cadeva simile a una fitta pioggia d'acqua. Quelli che erano chiusi in casa avevano l'impressione che fosse un temporale; sentivano come il ticchettio dell'acqua; udivano tuoni, vedevano i fulmini.

Tale pioggia di lapillo durò tutta la notte, sino alle 11 del giovedì 23 marzo.

In questo giorno, alle ore 10 cadde del lapillo circondato da uno strato di ghiaccio. A prima vista sembrava grandine dello spessore di 4 cm. di diametro; liquefacendosi il ghiaccio, restava il granulo del lapillo. A mezzogiorno il cielo cominciava a rischiararsi.

Nella mattinata di venerdì, 24, incominciava a cadere della cenere; ora più, ora meno copiosa, secondo lo spirare del vento.

Soltanto nel pomeriggio del sabato, 25 marzo, si potè osservare il Vesuvio mentre che nei giorni precedenti era stato coperto da fitte nubi.

Sono state completamente distrutte le piante di piselli, di fave, e coperte le patate sotto fitta coltre del materiale caduto. Le piante di albi-

cocche e pesche hanno avuto tutte le gemme rotte. Molti fabbricati hanno avuto il tetto crollato sotto il peso del lapillo su di esso accumulato.

Il lapillo di S. Giuseppe Vesuviano era costituito in prevalenza di magma antico. Si presentava umido; si presentava arrotondato; mostrava pochi frammenti di ossidiana. La parte pulverulenta, cinerea, finissima, la quale copriva questo lapillo, era costituita da elementi cristallini, con predominio di quelli chiari spettanti alla leucite. Parte del lapillo caduto era di aspetto rossastro, ma la costituzione era identica alla precedente. Pochi erano i frammenti di magma coevo commisto a tale lapillo. È caduto altresì lapillo filamentoso, minuto, di magma coevo di aspetto *prevalentemente* vetroso, di colore marrone, e molto somigliante alle foglie di thè del commercio.

I fenomeni e i prodotti piroclastici a Poggiomarino.
(E. 12° S) (distanza dell'asse craterico km. 10,8).

Nei giorni 20 e 21 si incominciarono ad udire fortissime detonazioni con forti tremiti delle case. Nel pomeriggio del 21 cominciò a notarsi la prima emissione di grandi colonne di fumo, con proiezione di poco lapillo, molto minuto, che cadeva sulle falde sud-occidentali del Gran Cono.

In Poggiomarino il 22, alle ore 4, iniziò la pioggia di lapillo minuto, che verso le 6 cominciò ad aumentare in grandezza; ed aumentavano altresì le esplosioni al Vesuvio fino al punto da far spalancare le finestre. Più tardi la grandezza dei proietti aumentava man mano. Alle ore 9 cadevano grosse scorie da gr. 500 a 1000. Tali scorie cadevano caldissime o incandescenti al rosso. Per breve tempo si notò un fenomeno impressionante: in seguito a tale caduta strade, campagne, cortili, terrazze, fumavano come stessero per incendiarsi. Lo spessore del materiale caduto aveva già superato i marciapiedi, gli scalini delle porte delle case, i binari della ferrovia; il materiale caduto aveva raggiunta l'altezza di 25 cm.

La caduta delle scorie si effettuava quasi obliquamente; si aveva la impressione che, stando con le spalle al Vesuvio, fossero lanciate dalla zona nocerina. Il treno che nelle prime ore del mattino era partito da Poggiomarino, rimasto bloccato a Cangiani, stazione subito dopo Poggiomarino verso Napoli, ebbe rotti tutti i cristalli rivolti alla zona nocerina, mentre sani erano quelli rivolti al Vesuvio.

Un fenomeno identico si ebbe anche ad Ottaviano, durante l'eruzione del 1906. Esso è spiegabile supponendo che per la notevole aspirazione di aria provocata dalla colonna di aeriformi ascendenti dal cratere del vulcano si stabilisca una circolazione aliseiana nel settore battuto dall' eruzione, ossia un vento inferiore con direzione verso il Vesuvio, e un vento superiore in direzione contraria.

In questa eruzione del 1944 al vento superiore di nord-ovest (che durò quasi per tutto il periodo eruttivo, forse per qualche notevole depressione

ciclonica nell'alto Adriatico) si contrappose un vento inferiore di sud-est che spingeva di nuovo verso l'asse del Vesuvio i detriti cadenti.

Dopo questa violenta fase eruttiva si ebbe una pausa nella zona in parola dalle 12,30 alle 13. Più tardi altri scoppi provocavano il lancio di altro materiale, il quale però progressivamente diminuiva di grandezza, sicchè verso le ore 18 cadevano soltanto sabbia, cristalli sciolti di augite e cenere.

La mattina del 23 cadeva a Poggiomarino una lievissima pioggia di cenere, mentre nella zona costiera di Torre del Greco, di Torre Annunziata, la cenere cadeva così fitta che per la maggior parte del giorno si rimase immersi nelle tenebre. Verso le ore 14 del 23 ricominciava a Poggiomarino la pioggia del materiale; non più costituita da grosse scorie, bensì da piccoli lapilli, prima rossastri, poi grigi; e dopo due ore di tali produzioni veniva giù una leggiera pioggerella di granuletti piccoli, di aspetto come quello del sale molto minuto, costituita da cristalli isolati di leucite. Caddero poi anche pomicette giallicce, indi lapillo grigio con augite e leucite. Nel pomeriggio di tale giorno, 23, la visibilità del fianco nord-est del Vesuvio era ottima, e quindi si osservava che mentre la cenere era trasportata dal vento verso la zona costiera, a Poggiomarino invece cadeva la varietà descritta di materiale piroclastico più grosso. Nel tardo pomeriggio il grande pino prendeva la direzione di sud-ovest, insistendo su Torre del Greco, e si allontanava da Poggiomarino.

Ma nel giorno 24, il vento di nord-ovest (dai locali detto « capuano »), di nuovo abbatteva il pino su Poggiomarino; sicchè si aveva l'impressione che addirittura questo paese dovesse essere seppellito, la cenere oscurava letteralmente l'aria. Una leggiera pioggerella fece sì che vi cadesse una lieve pioggia di fango, la quale durò fino alle ore 14. Poi improvvisamente si levò un forte vento di nord-est, provocando una violenta tempesta. Grandi masse di sabbia e cenere venivano turbinosamente sollevate e trasportate; le campagne così mascherate non mostravano più l'ombra di vegetazione. S'aveva l'impressione di essere nel deserto africano, quando poderoso soffia il vento; la violenza per giunta era tale che non si poteva reggere in piedi. Questo vento ripulì il cielo di Poggiomarino abbattendo il pino verso il mare. Dopo di ciò nient'altro di notevole in tale settore, nel quale lo spessore di materiale caduto variava dai 20 ai 40 cm. e anche più. Difatti nella zona di Terzigno lo spessore raggiunse dai cm. 70 agli 80; e man mano progressivamente diminuiva spostandosi da Terzigno verso San Giuseppe.

Tra il lapillo caduto a Poggiomarino rinvenni frammenti di lava leucitica antica. Le scorie erano molto bollose della grandezza media di 10 cm. e contenevano grossi cristalli di augite, e piccoli cristalli di leucite. Nel lapillo del vicino S. Valentino Torio, ivi caduto il 23 marzo, notai scarsezza di leucite, la quale era anche molto piccola. Anche in questa località si notarono in preferenza cristalli di augite isolati nel lapillo.

I fenomeni ed i prodotti a Valle di Pompei e ad Orti Avagliana.
(E 28° S) (distanza dell' asse craterico km. 9 e 13.0).

A Valle di Pompei il 23 marzo, alle ore 16, fu raccolta una sabbia identica a quella caduta alla Badia di Cava lo stesso giorno dalle ore 14 alle 16, solo la grandezza ne differiva, perchè quella di Valle di Pompei era di grandezza doppia di quella di Badia di Cava, e ciò evidentemente per la minore distanza.

Ancora a Valle di Pompei alle ore 5 del 24 cadde una sabbia più fina della precedente ed un poco marrone. Nella cenere ivi caduta alle ore 8,10 del 24 si scorgevano frammenti di leucite e abbondanti cristallini arrotondati di leucite.

La sabbia caduta il 24, alle ore 5,40 era costituita da granuli sabbiosi nella maggior parte formati da magma paleogenico in frammentini angolosi od arrotondati, da granuli arrotondati di leucite, da frammenti di olivina, taluni scheggiosi, altri arrotondati e da qualche frammento di augite.

Nella zona di Orti Avagliana, vicino Angri, caddero grosse scorie incandescenti, ed il materiale piroclastico raggiunse lo spessore di 70 cm. con effetti deleteri sulla vegetazione. Il materiale di Orti Avagliana è costituito da grosse scorie bollosissime, da lapillo, da cristalli liberi numerosissimi di augite, molto grandi, e poi subordinatamente da leucite, da olivina, e da pochissima cenere.

La cenere osservata è chiara, con leggera tendenza al marrone; in essa si notano, in gran prevalenza, frammenti di cristalli di leucite, ma fondamentalmente si può dire che rappresentava la composizione stessa della lava, poichè di questa si notano ben rappresentati i costituenti. Nella zona in questione si ebbe, in particolar modo, abbondante pioggia di cristalli liberi di augite, che si raccolsero con grandissima facilità.

Le scorie furono talune grossolanamente bollose fino a tendere a spongiose, altre finemente spongiose, altre finemente bollose. La grandezza di tali proietti in media si mantenne su 12 x 9 cm. Il lapillo andava dalla grandezza di un pugno a quella di una nocciola. Tanto le scorie che il lapillo erano straordinariamente ricchi di cristalli di augite, tanto che alcuni proietti ne costituivano un vero impasto, mentre la leucite scarseggiava.

In 925 grammi di lapillo trovai 385 grammi di augite, 7 grammi di leucite e 3 grammi di olivina.

I 385 grammi di augite comprendevano circa 5000 cristalli piccoli, 400 cristalli più grandi e 750 cristalli geminati.

Inoltre vi rinvenni qualche frammento di idocrasia e poche laminette ben cristallizzate di biotite.

Della fluidità della pasta del lapillo e delle scorie fanno fede le esili

pareti della cavità, e le spicule e i sottili filamenti che si incontrano rompendo la massa. Le bollosità delle scorie si presentavano finemente cribrate.

Oltre le scorie a sviluppo di grandi augiti, vi erano anche scorie a piccole augiti con sviluppo eguale di leucite. In questi ultimi tipi di proietti la grande ricchezza di piccolissimi cristalli di leucite ci dà una delle ragioni dell'abbondanza di cristallini di leucite e dei loro frammenti che si rinvengono nelle ceneri dovute al frantumamento e confricamento di scorie; perchè è evidente che i frammenti di leucite non possono formarsi che per il frantumamento dei cristalli stessi per l'urto reciproco delle scorie, le quali in tal modo possono liberare anche cristalli isolati assieme ai frammenti di questi. La maggior fragilità della leucite di fronte all'augite e la maggiore ricchezza in sostanze estranee che la leucite possiede, che la rendono più fragile, ci dà ragione del trovarsi nelle ceneri più frammenti di leucite che di augite. Inoltre, essendo le ceneri leucitiche più leggere possono più a lungo rimanere sospese nell'atmosfera ed essere trasportate più lontano dal vento. Oltre alle tipiche scorie caddero anche proietti lavici tipicamente bollosi.

I fenomeni e i prodotti piroclastici a Cava dei Tirreni.
(E 33° S) (distanza dell'asse craterico km. 28,0).

Lapillo molto grande, della grandezza massima di una noce, della media di una nocciuola, il più piccolo quanto un pisello, si è spinto ed è caduto in quel di Cava in quantità notevole; fin tutta la zona montuosa della Badia fu coperta da un buon mantello di lapillo lavico coevo.

Per cortese interessamento del Prof. Geremia D'Erasmo ho potuto esaminare i prodotti piroclastici caduti alla Badia di Cava, dove egli trovavasi durante il periodo eruttivo, e accuratamente li raccolse secondo il loro ordine ed ora di caduta. Successivamente recatomi, dopo il periodo eruttivo, sulla zona ho esteso le mie osservazioni.

Il lapillo del 22 marzo 1944, raccolto dalle ore 10 alle 11, mostrava numerosissimi i cristalli di augite, sciolti od attaccati ancora al lapillo lavico od in esso inclusi; come pure sciolti ed abbondanti i cristalli di leucite, anche essi attaccati od inclusi nella massa del lapillo. I cristalli più grandi di augite rinvenuti raggiungevano la grandezza di sette millimetri. Le forme sono le comuni osservate: $\{100\}$, $\{110\}$, $\{\bar{1}11\}$. Sovente erano geminati per (100) od anche per (101) ed $(\bar{1}11)$; alcuni geminati per $(\bar{1}22)$. Alcuni cristalli presentavano la geminazione associata di $\{100\}$ e $\{101\}$. Frequenti i cristalli di augite agglutinati con quelli di leucite, che risultavano sovrapposti ai primi. In tal caso la leucite si presentava vitrea per lo più incolore; però in tali condizioni notai che sovente i cristalli di leucite si presentavano con spigoli fusi e le facce corrose. In alcuni cristalli di augite, fra i quali quelli della grandezza di 7 mm., ho notato facce a superficie

scabra. Osservati attentamente per constatare se si trattava di corrosione di faccia, ovvero di patina di vetro vulcanico, ho potuto constatare che su ogni faccia si osservavano numerose fossette circolari, le quali si presentavano come una rottura di una piccolissima bolla, quindi come tante tumefazioni elevantisi dalla superficie della faccia. come se sagomassero qualche corpo sottostante. Ma siccome la sagomatura in talune aveva alcunchè di poliedrico, spinsi l'osservazione a maggiori ingrandimenti. e notai in primo luogo che effettivamente la patina vetrosa si sollevava come avesse coperto qui e lì della sostanza sottostante; ma quel ch'è di più, la sagomatura in talune di queste bolle presentava nitida la presenza di facce trapezoidali. Inoltre la conca della bolla era costituita da una sostanza di aspetto vitreo a frattura irregolare, la quale per tutti i suoi caratteri che presentava, rivelava la sua natura leucitica. Si aveva l'impressione, osservando tali superfici, come se sostanze gassose avessero determinato la rottura della patina, o che talune fossero dovute esclusivamente a tali cause. Ma osservando attentamente, a maggiore ingrandimento, si notava una superficie presso a poco pianeggiante, dalla quale si elevavano rilievi come fossero tanti crateri di tumefazione; i quali per la loro forma globulare, per la natura del fondo, sovente occupato da minuti frammenti di cristalli incolori, dalla forma del cercine, dalla sagomatura del rilievo, rivelavano che anche lì dove la leucite non si trovava, dovevano essere interpretati come fossette lasciate dai cristalli di leucite, che immersi nella pasta fluida furono avulsi nell'atto esplosivo pel soffio stesso dei vapori. Osservando i cristalli di augite che tenevano a loro attaccata la leucite, si notava che dalla parte dove poggiavano i cristalli di leucite questi si immergevano nella massa dell'augite, quindi ne erano inclusi. Inoltre osservai che su taluni individui augitici la pasta avvolgeva minuti cristalli di leucite; ed ancora di più osservai che la sostanza dell'augite e della leucite si trovavano insieme compenetrate, penetrando l'augite sottilmente nella massa leucitica. Frequentissimi gli aggregati di cristalli di leucite agglutinati, della grandezza che va da quella di un acino di pepe a quello di un pisello, di aspetto sferico, ma ancora discernibili le facce di trapezoedro, essendo stati gli spigoli tutti arrotondati. Tra questi cristalli ve ne erano di quelli con facce ben distinte e spigoli netti. Frequenti erano gl'individui isolati di leucite.

Nel lapillo raccolto il 23 marzo, dalle ore 10 alle 12, si notavano frequenti cristalli isolati di augite della grandezza massima di 7 mm. secondo l'asse verticale; coperti da una patina vetrosa; comuni sono anche quelli ad habitus prismatico tozzo; le forme sono le stesse di quelle osservate nei cristalli del precedente lapillo. Oltre ai cristalli sciolti ve ne erano di quelli impiantati nel lapillo, il quale si presentava finemente bolloso e privo di cristalli di leucite osservabili ad occhio nudo; solo a forti ingrandimenti era possibile discernere minutissimi cristalli di leucite. Si notavano molti cristalli di olivina di color giallo pallidissimo, habitus allungato, ben distin-

guibili le facce; le quali non si presentavano lucide ma corrose. Oltre i cristalli interi si notavano anche frammenti di tale minerale.

Notevole era la differenza del contenuto e grossezza della leucite fra il lapillo del giorno 22 e questo del 23. Questo lapillo evidentemente proveniva da una zona più profonda della colonna magmatica, dove i cristalli di leucite non s'erano ancora accresciuti. Ciò conferma quanto è stato detto da altri studiosi che le leuciti si nutrono nella parte più superficiale del condotto magmatico. Da ciò si deduce che la lava a grosse leuciti proviene dalla parte alta del condotto, e che nell'esplosione, i vapori ed i gas, liberatisi dalla colonna magmatica a grosse leuciti, hanno attinto il materiale della parte più profonda del condotto.

La sabbia del 23 marzo, caduta dalle ore 14 alle 16, era costituita in prevalenza da granuli arrotondati di magma antico (rari frammenti di magma coevo), da cristalli sciolti di leucite, di olivina (pochi), d' augite, laminette di mica nera (biotite).

Aderenti ai granuli sabbiosi era una polvere di color cenere, la quale esaminata è risultata costituita in prevalenza da minuti elementi cristallini a spigoli vivi ben riconoscibili, spettanti alla leucite, all'augite, all'olivina. La leucite però prevale, quantunque la cenere abbia una tinta leggermente traente al marrone. La presenza di materiale magmatico antico, sabbioso, evidentemente deve attribuirsi a frantumamento del materiale antico delle pareti del condotto per effetto della violenza esplosiva.

La cenere fra il 24 e il 25 marzo aveva colore chiaro. Essa risultava prevalentemente costituita da leucite, in piccolissimi cristalli e maggiormente in frammenti. Osservata la parte pulverulenta finissima che rimaneva a lungo in sospensione nell'acqua è risultata costituita in prevalenza da frammenti leucitici. Ciò conferma quanto Palmieri e Scacchi conclusero sul colore e natura delle ceneri chiare.

I fenomeni e i prodotti piroclastici a Torre del Greco.

(S 44° W) (distanza dell'asse craterico km. 6,5).

Il 20 marzo, lunedì, si avvertirono le prime lievi scosse, accompagnate da boati, cinque o sei volte durante il giorno; quasi niente fu avvertito nella notte.

Il 21 marzo, martedì, durante la mattinata, le scosse aumentarono di frequenza. Alle ore 17 circa, si ebbe il lancio di un grosso pino dal cratere, ed improvvisa ripresa di scosse e boati che aumentarono sempre più di intensità sino a raggiungere il massimo verso le ore 2 del mercoledì 22 marzo. L'intensità proseguì più o meno forte nelle ore mattutine precedenti all'alba. Le autorità alleate ordinarono di tenersi pronti, perchè si prospettava probabile lo sgombero della cittadinanza, a causa del pericolo di una

colata lavica che si avvicinava. Verso la sera il pericolo fu dichiarato scomparso.

Il 23 marzo, giovedì, incominciò la prima pioggia di cenere, che si presentò granulosa e rossastra; più tardi era così fitta che per la maggior parte del giorno si era immersi nelle tenebre.

Il 24 marzo, venerdì, al mattino, piccolo straterello uniforme di cenere sulla città. A metà della giornata la pioggia di cenere diminuì del tutto. Incominciò a non notarsi più la cenere di colore rossastra.

Il 25 marzo, sabato, ricominciò a cadere la cenere di colore grigio e molto fine. Verso le 11 piovve acqua frammista a cenere con forte puzzo di anidride solforosa. A sera, la caduta di cenere fu molto forte nella parte sud-orientale della città, mentre fu debolissima nella restante parte.

Il 26 marzo, domenica, si ebbe piccola pioggia di lapillo nelle compagne della parte alta. Si depositò uno strato di pochi centimetri. La cenere raggiunse nella parte sud-orientale l'altezza di circa 35 cm. In città fu di circa 10 cm.

Il 27 marzo, lunedì, la pioggia di cenere cessò del tutto. Però la pioggia di cenere non era stata mai uniforme, spirando in quei giorni un vento molto forte, tanto che il 24 la nube del pino fu spinta sulla città e passò al di sopra di essa a poca altezza e senza che cadesse cenere. Nè danni ai fabbricati, nè alle persone. Invece molti danni alle campagne, specialmente nella parte sud-orientale verso Torre Annunziata.

In un giorno, non precisato dagli informatori, la popolazione fu avvertita con un bando che un gas emesso dal Vesuvio veniva spinto verso la città, e che quindi si fosse mantenuta nella parte alta delle case. Lo strato di gas però non raggiunse i 70 cm. In seguito sono stati emessi bandi per le mofete. In qualche ricovero se ne è notata, e qualcuna che già era in funzione ne fu rafforzata.

La cenere, come in occasione di altri parossismi vesuviani, fu nerastra nei primi giorni dell'eruzione (20 e 21 marzo); fu rossastra e rosso marrone nei giorni seguenti (22 e 23 marzo) a Orti Avagliana ed a Cava; fu bigio-chiara o biancastra nei giorni ultimi (24 e 25 marzo) ad Orti Avagliana, a Cava, a Torre del Greco.

L'altezza del materiale piroclastico fu a Torre del Greco 10 centimetri, a Poggiomarino 25-40 cm., a Cava dei Tirreni 30 cm., a Terzigno 75-80 cm. Napoli non ebbe neppure un granello di cenere; fu difesa dal vento dominante e quasi costante di nord-ovest durante l'eruzione. Conseguentemente dalla città si vedeva di giorno il pino imponente dei vapori e delle ceneri, di notte l'incandescenza delle colate laviche e delle fontane di lava.

Riassumendo ora le osservazioni macroscopiche e microscopiche eseguite sul materiale piroclastico raccolto e studiato, lapilli, ceneri, o cristalli che siano, lo si può nettamente distinguere in paleogenico e neogenico.

Attestano il materiale paleogenico: i lapilli formati da frammenti di lava antica. con leuciti caolinizzate, non che pezzetti informi o arrotondati di cristalli di leucite, di augite, di olivina, di ossidiana (rara). Come pure attestano materiale antico sabbie e ceneri formate anche esse da frammentini arrotondati di lava antica, di pezzettini piccolissimi informi di cristalli di leucite, di augite, di olivina, lapilli e ceneri che per tali caratteri dimostrano di provenire da triturazione di rocce preesistenti.

Fanno testimonianza di materiale neogenico. ossia di materiale coevo: lapilli spongiosi, nerastri, con cavità limitate da esili pareti, intramezzate da sottili filamenti, attestanti, per tali particolari, nonchè per la superficie non appannata, ma lucida. di provenire direttamente dal bagno lavico, o da frantumi di scoriette anch'esse strappate dal magma fuso.

Documentano molto più provenienza da magma fluido frammenti di lapillo filiforme, stirato; alle volte anche in laminette fogliacee sottilissime. Così pure sabbie e ceneri formate da goccettine di magma, da minutissimi frammenti di magma filato, o da piccolissimi, microscopici cristalli di leucite, o da frammenti di essi, specialmente nelle ceneri bigio-chiare, dimostrano la loro origine da magma coevo, anzi da magma fluidissimo.

Numerosi, come ho detto, i cristalli isolati di augite e di leucite in quasi tutte le località. Molti cristalli di leucite compenetrati da quelli di augite e viceversa. Diffuse le particelle di cristalli di olivina e le laminette di mica biotitica.

Dall'aspetto, dalla superficie, dal colore, diversi di questi elementi lavici mostravano appartenere a materiale paleogenico.

Non così altre particolari formazioni, come le minuscole bombe, caratteristiche dei magmi fluidi hawaijani, lunghe cm. tre spesse mm. otto.

Molti cristalli di augite e di leucite avevano brandelli di magma coevo attaccati su essi; altri ne erano quasi completamente avviluppati. Cristalli di augite e di leucite erano agglutinati fra di loro da pasta di magma neogenico.

Cristalli isolati di augite erano coperti da straterelli di magma molto sottile; altri avvolti da straterello di magma su cui erano impiantati minuscoli cristalli di leucite; in altri, (rilievo questo molto interessante), lo straterello di patina magmatica mostrava impronte, incavi, con facce poliedriche, corrispondenti al leucitoedro, nei quali evidentemente erano attaccati minutissimi cristalli di leucite, poi staccatisi.

Tutto ciò attestava che tale materiale era neogenico, o almeno era stato a contatto con esso, e poi avulso da magma fluidissimo.

Lo stesso era comprovato da cristalli di leucite più piccoli non ancora ben nutriti e quindi provenienti, come ritengono quasi tutti i vulcanologi, da magma contenuto nella parte alta del condotto vulcanico.

Mettendo in relazione questi risultati con lo svolgersi delle successive fasi eruttive è lecito poter concludere che il materiale neogenico provenne

dalle esplosioni stromboliane e dalle fontane di lava, ossia dalla fase ignea esplosiva; la quale, data la fluidità del magma, può ben dirsi *hawaijana*, mentre il materiale paleogenico può ritenersi proveniente dalle esplosioni *pseudo-vulcaniane* della fase omonima.

Questi risultati, già per sè stessi soddisfacenti, apportano un notevole contributo ad alcune questioni ben note agli studiosi di Vulcanologia che riguardano: l'origine delle ceneri e dei lapilli; la genesi delle ceneri bianche; e la provenienza dei cristalli isolati proiettati durante le esplosioni. Ne farò cenno partitamente e brevemente.

L' origine delle ceneri.

Il primo che abbia parlato sulla genesi della cenere vulcanica è stato Giovanni Alfonso Borrelli.

Nella sua opera: *Historia et meteorologia incendii Aetnei anni 1699.* Regio Julio, 1670, pag. 90 e seg., così esprime: « Fieri etiam potest ut arenae de novo conficiantur duplici modo, aut quia saxa friabilia instar pumicis frangi et conteri possunt in illis vehementissimis Aetnaei montis concussionibus et fractionibus et sic scobis aut pulveris formam acquirant, eijciantur que a voraginibus Aetnaeis, vel potest de novo gigni praedicta arena, quatenus fluor ille vitreus glareosus potest scindi, frang que in plures particulas, duplici modo, aut dum fervet et fluiditatem pristinam retinet, aut post eius primam et inchoatam coagulationem concretionemque ».

Quindi Borrelli riteneva ben distinti due tipi di sabbia e quindi di ceneri: quella per frantumazione del materiale antico, e quella derivante direttamente dalla fluida lava, anzi aggiungeva potersi liberare sabbia anche della lava quando essa ha iniziato la sua consolidazione.

Scacchi non sapeva rendersi conto di questo terzo fattore; ma evidentemente il Borrelli intende riferirsi alle bocche di esplosione che sovente si formano sulla lava indurita superficialmente, mentre al disotto scorre fluida.

Babinet [1]) riteneva che la cenere vulcanica fosse prodotta dal condensarsi nell' aria, in minutissime particelle, di una parte della lava estrinsecatasi allo stato gassoso, la quale ricadeva sotto forma di fine sabbia.

« Cette pression (de continue sur le liquide intérieur) ne suffit point pour rendre compte de certaines éruptions des plus violents, et dans les quelles ce n' est pas la lave mais une colonne de dixhuit à vingt kilométres qui s fait jour au travers de l' atmosphere avec una force irresistible, et dont la matiére, èvidemment de nature élastique et gazuese, rétombe en pluie fine de sable vulcanique ».

---

[1]) *De la costitution intérieure du globe terrestre.* Révue des deux mondes, septembre 1855, pag. 1124.

Arcangelo SCACCHI [1]) si mostra contrario alla genesi della cenere vulcanica per l'urto reciproco di proietti lanciati in alto durante il parossismo eruttivo, o quando ricadono nel cratere; come propose BORRELLI, e come ritengono molti studiosi.

Egli così si esprime: « Secondo la più comune, e potrei dire accreditata opinione, la sottil sabbia rigettata dai vulcani, deriva dall'urtarsi l'un contro l'altro, e stritolarsi, i massi di rocce lanciati dalla esplosione, sia quando sono proiettati in alto, sia nel cadere. Essendo stato spettatore di non pochi incendi vesuviani, non ho potuto aggiustar fede a questa teoria, perchè in verità i massi eruttati non corrono così stretti insieme da stritolarsi urtandosi. E d'altra parte, essendo essi formati per maggior parte da brani della materia fusa dalle lave, che continuano ad essere molli finchè nel cadere raggiungono il suolo, anche ammettendo un continuo cadere ed urtarsi fra loro, la mollezza dei medesimi non permetterebbe che si stritolassero. Fa d'uopo considerare altresì che tra le materie date fuori dei vulcani e portate dai venti in luoghi remoti, talvolta se ne hanno di forma filamentosa, quasi esili capelli, le quali per ogni riguardo si producono allo stesso modo della cenere vulcanica ».

Ma evidentemente SCACCHI pel fatto stesso che stava sull'orlo del cratere, non poteva essere stato spettatore di una grande conflagrazione vesuviana, nella quale il materiale certamente corre ben stretto e ben si urta; egli potè assistere allo slancio di qualche modesta attività esplosiva.

Per quel che riguarda il materiale coevo è giusta la osservazione di SCACCHI, che il materiale minuto piroclastico, quale le sabbie, e le ceneri non possono provenire dai brandelli di lava, i quali sono pastosi e si conservano tali anche dopo la loro caduta.

Ma anche questa osservazione va riferita, in genere, alle modeste esplosioni; invece nelle grandi conflagrazioni il materiale piroclastico va lanciato per notevole altezza nell'atmosfera, ed ha quindi tutta la possibilità e il tempo di raffreddarsi. Di ciò fanno fede gli innumerevoli proietti figurati e la gran copia di scorie che cadono dall'alto già induriti.

La maggior parte di tali proietti lanciati nelle grandi conflagrazioni, pur cadendo relativamente caldi, non raggiungono in genere, il grado, di pastosità voluta.

Inoltre lo SCACCHI sosteneva un altro principio, che le esplosioni non succedono in « mezzo a rocce solide, ma in mezzo a materiale fuse, tra le quali soltanto accidentalmente si trovano i frammenti di roccia solida »

È una riserva arbitrariamente limitata; bisogna sempre distinguere due tipi ambientali di esplosioni: quelle che avvengono fra il materiale antico e quelle che avvengono fra il materiale coevo.

---

[1]) *Sulla origine della cenere vulcanica.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, anno XI, 1872 — 10 agosto, pag. 180.

Riassumendo: Scacchi negava che lo stritolamento della cenere e dei lapilli potesse generare la cenere per tre ragioni: 1) poichè egli, presente a molte eruzioni, non vide mai i proietti, lanciati dal cratere, urtarsi fra di loro; 2) perche i materiali esplosivi essendo di lava fluida ritornavano giù ancora allo stato pastoso e quindi non in condizioni di triturarsi; 3) perche le esplosioni avvengono in mezzo a lave fuse nelle quali soltanto accidentalmente si può trovare materiale solido.

Per me faccio osservare:

1) che i proietti generalmente non si urtano tra di loro nelle esplosioni poco intense, quali quelle a cui egli potè assistere da vicino; ma ciò certamente non avviene nelle grandi esplosioni, nelle quali è notevole la portata del materiale piroclastico;

2) il materiale piroclastico ritorna giù ancora pastoso quando, per le esplosioni poco intense, è spinto a piccola altezza; ma quando nelle grandi esplosioni raggiunge notevoli altezze ha tutto l'agio di raffreddarsi e cadere giù solidificato, e quindi in condizioni di stritolarsi; nè tutto il materiale esploso è spinto fuori in condizioni di assoluta fluidità e pastosità;

3) le esplosioni avvengono in materiale sia fuso che solido incoerente e questo ormai è noto.

Ma più dei ragionamenti valgono i fatti:

Il mattino del 27 aprile 1872 fu osservata al Vesuvio una *polvere bianca* che il Palmieri raccolse sulle lave vecchie presso l'Osservatorio verso le ore nove. Lo stesso Scacchi avendo osservato al microscopio tale cenere dice che « per la massima parte si componeva di granelli vitrei rotondati di leucite, di grandezza variabile tra un sesto ed un terzo di millimetro di diametro, ai quali si aggiungevano pochi frammenti verdi di pirosseni ed altri più rari di olivina. Reputo notevole la loro forma rotondata, somigliante essi a grani di sabbia che per continuo attrito avessero preso tal forma; e tra i medesimi rarissimi erano quelli che si trovavano involti nella materia bruna della lava ».

Quindi l'illustre mineralogista dovè convenire che il materiale piroclastico subisce realmente attrito durante l'ascesa e la discesa in seguito alle esplosioni.

Ma Scacchi non potè rinunziare di ammettere l'ipotesi prospettata anche da Borrelli, che le ceneri potessero avere origine pure direttamente dal magma. In seguito all'eruzione vesuviana del 1855, studiando alcuni sublimati rinvenuti sotto la volta di un'ampia grotta, formatasi ove era una bocca eruttiva, e costituiti da cloruri alcalini mescolati a molta polvere di color grigio-rossastra che non era altro che una varietà di cenere vulcanica, faceva osservare che gli parve probabile che: « sia il vapore acquoso, sia i vapori di cloruri alcalini, scappando fuori dalle lave fuse senza dar luogo a sensibili esplosioni, potessero trasportare e spargere nel-

l'aria quelle tenuissime particelle delle medesime lave che costituiscono la cenere vulcanica ».

In conclusione: bisogna tener distinti, per la loro provenienza, due tipi di materiale piroclastico: quello cioe proveniente dal magma antico formante parte dell'impalcatura vulcanica avulsa nell'esplosione, e quello proveniente dal magma coevo.

Nel primo caso il lapillo, la sabbia, la cenere sono indubbiamente dovuti allo sgretolarsi, per lo scambievole urto, dei proietti, dei quali parte sono proiettati fuori l'orifizio craterico e parte ricadono nel cratere per essere di nuovo lanciati, ed è nel ricadere nel cratere e nella parte terminale del condotto che si attua maggiormente lo stritolamento.

Nel secondo caso: occorre ritenere che la violenza degli aereiformi fuoriuscenti dal magma possa strappare particelle minutissime fuse o pastose per portarle in alto dove si solidificano, per poi cadere giù sotto forma di lapillo, di arena e di cenere, oltre quello che può derivare dallo stritolamento di questo materiale.

Con le mie osservazioni e conclusioni innanzi riferite sul materiale piroclastico eruttato dal Vesuvio nel suo parossismo del marzo 1944 resta confermata la provenienza di esso sia dal materiale vecchio costituente l'edifizio vulcanico, specialmente del condotto e del cratere, sia dal materiale coevo proveniente direttamente dal magma.

La genesi delle ceneri bianche.

Donde il colore bianco delle ultime ceneri? Cadono esclusivamente alla fine delle eruzioni?

Rispondo prima al secondo quesito.

Ceneri bianche sono cadute anche durante lo svolgimento di un parossismo vulcanico. Così avvenne durante l'eruzione vesuviana dell'aprile 1872, nel giorno 27.

In tal caso l'analisi microscopica ha dimostrato che si tratta di ceneri essenzialmente leucitiche. Ma questo caso non è comune, ed evidentemente è esclusivo dei vulcani leucitici.

Le ceneri più chiare che sono cadute alla fine di molte eruzioni del Vesuvio (1660, 1694, 1737, 1767, 1779, 1794, 1861, 1872, 1906, 1944) possono essere tali per varie ragioni;

1) perchè tutte le rocce, anche le più scure, finemente polverizzate assumono colore chiaro. Le ultime ceneri sono il risultato finale della triturazione meccanica operata dalle esplosioni, ed essendo più leggere sono rimaste più tempo nell'atmosfera e cadono in ultimo [1]).

---

[1]) Tale era l'opinione esclusiva di Lacroix (*Étude mineralogique des produites silecatés de l'éruption du Vésuve*, avril 1906, Paris, Masson, 1907 pag. 63). Egli aveva

2) Le ceneri emesse durante il parossismo vulcanico sono a più alta temperatura; e perciò con maggiore facilità i loro composti ferrosi, nell'aria, si ossidano e diventano ferrici, dando al miscuglio polveroso colore rosso marrone; invece le ceneri emesse alla fine di una eruzione sono a bassa temperatura e quindi non subiscono tale ossidazione.

3) Perchè quando le ceneri contengono insieme ad altri minerali anche la leucite, subiscono nell'atmosfera una cernita in base al differente peso specifico dei loro componenti; ne risulta una asportazione della parte vetrosa e dei componenti più pesanti che cadono prima ed un arricchimento conseguente dei frammenti leucitici. Quindi tali ceneri sono chiare, perchè se non sono essenzialmente leucitiche, sono prevalentemente leucitiche.

Le ceneri quindi del nostro Vesuvio hanno insita la causa del loro colore bianco perchè il magma di provenienza è molto ricco in leucite. L'arricchimento delle ceneri in leucite è stato, dalle mie osservazioni riferite innanzi, sufficientemente rilevato; di nuovo aggiungo che, essendo i cristalli di leucite più fragili di quelli d'augite, con maggior facilità se ne riproducono i frammenti costituenti delle ceneri.

Quindi in un vulcano leucitico, qual'è il Vesuvio, le cadute delle ceneri bianche possono aversi in due periodi.

Un primo periodo si può avere durante l'eruzione per emissione di ceneri essenzialmente leucitiche.

Un secondo periodo si ha quasi certamente alla fine di ogni eruzione, per caduta di ceneri prevalentemente leucitiche.

La genesi dei cristalli liberi nel lapillo.

Un'altra questione riguarda se i cristalli isolati che si trovano nel lapillo possono essersi formati fuori il condotto vulcanico.

La produzione di cristalli liberi, sia interi sia frammentari, in una conflagrazione eruttiva, nella congerie del materiale piroclastico, si è manifestata spesso più o meno abbondante. Così è stata segnalata l'augite al Vesuvio, all'Etna, allo Stromboli; la leucite al Vesuvio; la labradorite all'Etna; l'olivina al vulcano Réunion [1]).

---

analizzato un campione di cenere bianca dell'eruzione del 1906 e l'aveva trovata povera di potassa, quindi non leucitica. A me pare, con tutto il rispetto all'illustre decano della vulcanologia, che così asserendo si generalizzi troppo: alcune ceneri bianche sono tali perchè risultato di sottilissima triturazione di lave; altre sono bianche perchè leucitiche. L'analisi ottica e chimica decide. Lacroix poteva avere ragione per il campione che aveva esaminato, e che, a quanto pare, aveva raccolto sull'orlo del cratere.

[1]) Scacchi A., riferiva di eruzioni di cristalli isolati di leucite nel 22 aprile e 14 settembre 1845, e nell'agosto 1846 (Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. vol. X fasc. 9

Pilla Leopoldo riteneva che i cristalli di leucite si formassero fuori del cratere, nei proietti di lava fusa lanciati in alto delle esplosioni; i quali proietti contenendo gli elementi della leucite si sarebbero trovati in condizioni tali da permettere l'orientamento delle particelle sì da formare i cristalli di leucite.

« Il faut donc croire que cette formation des cristaux d'amphigene) est arrivé après coup, c'est a dire que les petites scories lancées par le volcan et qui contenaient les éléments des amphigènes, ont peut se trouver, dans le moment de leur refroidissement et de leur consolidations, dans des circostances speciales qui ont permis a leurs molecules de s'aggreger selon la formule de composition et la forme cristalline de ces substances » [1].

Contro tale opinione Scacchi obbiettò che infondatamente potevasi dubitare dell'emersione di cristalli completamente formati dalla scorrevole lava, egli osservava che questi cristalli di leucite avevano una forma molto regolare e la grandezza abituale di un grosso pisello, per cui erano molto somiglianti a quelli che si rinvengono nelle antiche lave del Monte Somma. E perciò era propenso a credere che provenissero da qualche antica lava « soggetta a novella fusione nelle recenti conflagrazioni » [2].

Ma questo concetto della rifusione di antiche lave non è esatto.

In primo luogo perchè non vi è ragione di escludere che i cristalli di leucite possano formarsi da consolidazione intratellurica; la loro grandezza dipende dalla maggiore o minore profondità della regione di loro formazione, e dal tempo intercorrente tra la loro formazione e la loro espulsione. Di ciò fanno fede i cristalli di leucite che sono ancora impigliati nella pasta del magma coevo, o tengono attaccati ancora porzioni dello stesso magma.

In secondo luogo perchè questa digestione magmatica opinata da Scacchi ci costringerebbe a formulare tante congetture sulla permanenza del magma in profondità e sulle modalità secondo cui questa fusione potrebbe verificarsi.

Tenendo presente la genesi e la successione delle antiche colate laviche e, di conseguenza, la impalcatura del nostro vulcano, come di tanti altri,

---

1847 pag. 39-45). Negli Annali civili del Regno delle Due Sicilie (vol. XLIV, fasc. di maggio, giugno, luglio, agosto 1847, a pagg. 62-66, in « *Eruzioni di cristalli di leucite Vesuvio* », cita le date del 22 aprile 1845 e 10 febbraio e 22 giugno 1847; Dice ivi ancora di cristalli eruttati isolati d'augite nella eruzione vesuviana del 1839 caduti a grande distanza dal cratere.

[1]) Pilla L., *Sur quelques mineraux recuillis au Vesuve et à la Roccamonfina*. Extrait d'une lettre de M. Leopold Pilla à M. Elie De Beaumont C. R. de séeances de l'Acad. de Sc. de Paris. 4 aout 1845; pag. 325.

[2]) Scacchi A., *Sull'origine della cenere vulcanica*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli anno XI 1872; pag. 190.

in genere, occorre tutto un artifizio per pensare in qual modo il nuovo magma avesse potuto rifondere l'antico, lungo il condotto eruttivo, e produrre tanta copia di cristalli liberi di leucite, contro la relativa pochezza del magma antico a contatto con il nuovo e contro la rapidità dell'atto eruttivo che non avrebbe permesso tale digestione. E qui si potrebbero moltiplicare le ipotesi.

Dalle osservazioni che ho eseguite e descritte sui prodotti piroclastici dell'eruzione vesuviana si può dedurre che i cristalli isolati possono provenire sia dalla frantumazione di dicchi lavici, prospicienti nel condotto vulcanico e nel cratere, sia dal magma coevo a cui vengono strappati della violenza degli aeriformi. In questo secondo caso, come ho fatto notare, vengono riconosciuti dalla patina o dai brandelli lavici ad essi attaccati.

CONCLUSIONE

In questa eruzione del Vesuvio se copiosa abbastanza è stata la quantità del magma lavico che il vulcano ha estrinsecato allo stato continuo, non è stata indifferente la quantità di materiale piroclastico coevo che è stato emesso a giudicare dalla superficie su cui il materiale è caduto, dallo spessore ivi raggiunto e dall'aumento di altezza che ha subito il Gran Cono nel settore di nord-est sul residuo della sua piattaforma terminale dove andavano a cadere in gran parte le ingenti fontane di lava emesse durante la fase ignea esplosiva.

La copia enorme di vapori svolgentisi impetuosamente dal magma fluidissimo lo sminuzzò in focacce, in lapilli, in sabbie, in ceneri.

Tra questo materiale le sabbie e le ceneri, oltre ad essere prodotte per confricazione delle scorie e dei lapilli tra di loro, derivarono anche dal bagno magmatico diretto, come ci è stato facile concludere dalle osservazioni sul materiale piroclastico studiato.

Trattandosi di un magma così ricco in leucite e di augite, quale è quello vesuviano, è da ritenere che allorquando i vapori ed i gas, pervadendo, dilacerando, soffiando il magma, trovano ostacolo nei nuclei delle fasi cristalline, li espellono, e nel contempo fanno maggiormente sentire la loro influenza sulle circostanti porzioni di magma fluidissimo, che viene ad essere così ridotto in minutissime porzioni sabbiose e cineree.

Nel contempo i cristalli di leucite e di augite, secondo la gravità specifica e la loro grossezza, cadono più o meno lontano dall' asse eruttivo.

Ad Orti Avagliana, ad esempio, più vicino al Vesuvio, furono molto grandi i cristalli di augite, che invece furono più piccoli a Badia di Cava, località più lontana dal vulcano.

Partendo dalla supposizione che una delle cause delle eruzioni vulcaniche sia la costrizione del bacino magmatico, anche lievissima, dovuta ai

lenti moti orogenetici, si è tentati di supporre che l'atto eruttivo studiato, manifestatosi con efflussi e con esplosioni così rapidi ed ingenti, possa interpetrarsi così:

1) fuoriuscita di magma lavico dalla parte terminale del condotto sia sotto la spinta costrittiva che per l'urgere dei vapori: origine delle colate.

2) esaurito l'efflusso, in dipendenza della costrizione subita, il magma restante nella parte più bassa del condotto è stato spinto fuori dall'aumento dei vapori e gas sottostanti, poichè questi, ridotti di volume per la costrizione subita, hanno avuto aumentata la loro tensione ed hanno spinto in alto la porzione superiore della colonna magmatica ed hanno proiettato fuori, per la loro forza, altra porzione della colonna stessa sotto forma di fontane di fuoco costituite da magma fluidissimo.

Tale il meccanismo probabile della eruzione a cui si è assistito nel marzo 1944. Il vulcano poi è entrato in una fase di quiescenza per esaurimento sia di massa magmatica che di energia termica.

Le zone di più bassa piovosità nell'Italia peninsulare

Nota del socio **Carmelo Colamonico**

(Adunanza del dì 5 giugno 1945)

Sunto. — L'Autore, riscontrando nel Tavoliere di Puglia e nel litorale apulo-lucano del mar Ionio le zone di più scarsa piovosità in tutta l'Italia peninsulare, ritiene che debba essere assegnata a tali zone una quantità media di precipitazioni non inferiore ai 400 millimetri annui.

Sulla distribuzione delle piogge in Italia è agevole formarsi oggi una idea molto vicina alla realtà. La rete italiana delle stazioni udometriche, divenuta notevolmente fitta negli ultimi decenni, ha consentito, attraverso la ricca messe di osservazioni, indagini anche particolareggiate sulla piovosità di molte regioni e ha reso possibili rappresentazioni cartografiche di grande attendibilità della quantità media delle precipitazioni annue che cadono su tutto il territorio nazionale [1]. Un esame anche sommario di tali

[1] Fra le carte della distribuzione delle piogge su parti dell'Italia peninsulare o su tutta la penisola, a prescindere da quelle contenute nei varii atlanti, anche scolastici, e in alcune delle Memorie Geografiche (G. Dainelli per la Toscana, 1908; e C. Colamonico per la Campania, 1915) e delle Memorie Geol. e Geogr. (F. Ferrini

carte rivela, nelle linee generali, alcune caratteristiche nella distribuzione della piovosità annua sulla massima parte dell'Italia peninsulare; e fra esse: 1) una più alta quantità di pioggia nella fascia montuosa appenninica mediana a confronto delle rispettive fasce costiere; 2) la successione da nord a sud, in mezzo alla stessa zona appenninica, di aree di relativa bassa piovosità in corrispondenza delle ampie vallate longitudinali e delle numerose forme concave da cui la catena è intaccata; 3) una maggiore quantità di precipitazioni sulle coste tirrene rispetto alle coste adriatico-ioniche di eguale latitudine; 4) una generale diminuzione di piovosità così come si procede dalle regioni settentrionali verso le meridionali.

I motivi principali di questa varia distribuzione delle piogge sull'Italia peninsulare sono da ricercare nella diversa esposizione delle singole zone ai venti carichi di umidità, che sono soprattutto i venti di sud-ovest provenienti dal mar Tirreno, e nella complessità del rilievo, per cui — a parità di altre condizioni — la quantità della pioggia aumenta, fino ad una certa quota [1]), con l'altitudine; va pure tenuto presente che, col decrescere della latitudine, si accentua il carattere mediterraneo del clima italiano, coi lunghi periodi di siccità estiva, non di rado preceduti da bassissima piovosità anche nei mesi primaverili, e nell'insieme con quantità annue assai scarse di precipitazioni.

Ciò spiega, infatti, perchè le aree di minore piovosità siano localizzate nel versante orientale del tratto meridionale della penisola, e soprattutto — a causa della minore altitudine media della Puglia rispetto alla Calabria — nei bassipiani, appunto, della regione pugliese.

Così, due zone con piovosità inferiore a 500 mm. annui vengono comunemente segnalate nelle carte della distribuzione della pioggia sulla penisola italiana, in corrispondenza l'una del Tavoliere di Puglia, e specialmente

---

per l'Italia meridionale, 1930) del DAINELLI, sono da ricordare: la carta del GHERARDELLI, nella classica opera del FISCHER « La penisola italiana » (1902), quella dell'EREDIA nel vol. « Le precipitaz. atmosferiche in Italia dal 1880 al 1905 » (1908), quella del ROSTER nella sua « Climatologia dell'Italia » (1909), le carte del DE GIORGI (1917) e del COLAMONICO (1917) sulla Terra d'Otranto, le carte quinquennali dell'EREDIA per il periodo 1921-25 (Pubbl. N. 13 del Servizio Idrogr. del Min. dei LL. PP.), la cartina del KANTER sulla Calabria (*Kalabrien*, Hamburg, 1930), le carte annesse al volume dell'EREDIA « Le precipitazioni atmosferiche in Italia nel decennio 1921-30 » (Pubbl. N. 16 del Serv. Idr., 1934), e le carte che accompagnano la pubblicazione N. 14 « Le sorgenti italiane » del Serv. Idrogr. (Vol. I, Regione Pugliese, 1928; vol. III, Agro Pontino e bacino di Fondi, 1934; vol. V, Lucania, 1937; vol. VI, Calabria, 1941; vol. VII, Campania, 1942).

[1]) È utile confrontare, a questo proposito, la nota di M. ORTOLANI, *Sulle variazioni della piovosità con l'altezza.* (Boll. d. R. Soc. Geogr. It., 1937, n. 4, pp. 270-304) nella quale è preso, fra l'altro, in esame il versante ionico dell'Italia meridionale.

del tratto prossimo al golfo di Manfredonia, e l'altra della fascia litoranea ionica, dal retroterra di Gallipoli fino oltre il corso inferiore del Bradano; quest' ultima zona, infatti, si estende ad abbracciare anche gran parte della costa ionica della Basilicata.

Se, peraltro, quasi tutte le carte concordano nella localizzazione di tali zone, notevoli sono fra esse le differenze sulla estensione che a ciascuna zona viene assegnata e soprattutto sui limiti di minore piovosità che vengono raggiunti: e intanto il tracciato delle più basse isoiete riveste una singolare importanza, perchè esse finiscono con l'individuare l'area meno piovosa di tutta l'Italia continentale e forse di tutto il territorio nazionale.

La più recente, infatti, di tali rappresentazioni, e cioè la tavola 16 dell'Atlante Fisico Economico d'Italia del Touring Club Italiano, rivela nella penisola salentina l'esistenza di un'area a precipitazioni bassissime, inferiori, appunto, ai 500 mm., la quale dal litorale ionico s'insinua, accentuandosi sempre più, nella pianura leccese, « dove sembrerebbe localizzato il minimo di piovosità di tutto il territorio italiano » [1]). E in quest'area i totali annui scenderebbero fino a meno di 300 millimetri, e cioè a valori notevolmente inferiori a quelli che si era soliti attribuire a tali regioni e ad ogni altra area a scarsissima piovosità in tutta Italia [2]).

Se non che, l'esame particolareggiato delle fonti utilizzate per il disegno delle isoiete nella carta suddetta mette in evidenza per il Salento la scarsa attendibilità dei dati della stazione di S. Pancrazio Salentino, dall'inizio del suo funzionamento (1922) fino al 1930, e cioè per il periodo che rientra nel trentacinquennio 1896-1930, tenuto presente per la costruzione della tavola [3]). Con la rinunzia, inoltre, ai dati di questa stazione, viene a scom-

---

[1]) Sestini A., *Note illustrative dell' Atlante Fisico Economico d' Italia*, Milano, 1940, pag. 38.

[2]) La segnalazione di quest' area è tanto più significativa in quanto il Salento è considerato fra le regioni d' Italia che dispongono di più lunghe e sicure serie di osservazioni pluviometriche: merito, cotesto, grandissimo di Cosimo De Giorgi, che creò nella sua provincia dal 1876 una fitta rete di stazioni udometriche e ne curò per oltre un quarantennio il regolare funzionamento. E intanto l' esistenza di una zona a così bassa piovosità nel cuore del Salento era del tutto sfuggita sia al De Giorgi sia a coloro che avevano successivamente utilizzato i dati da lui raccolti (cfr., infatti, C. De Giorgi, *Distribuzione delle piogge nella prov. di Lecce*, in « La Geografia », Novara, 1917, n. 5-6; C. Colamonico, *Zone di piovosità e densità di popolazione nella prov. di Lecce*, in « Riv. Geogr. Ital. », Firenze, 1917, n. 5; e C. Colamonico, *La piovosità della Terra d' Otranto*, in « Boll. d. R. Soc. Geogr. It. », Roma, 1917, n. 7-8).

[3]) L' esame della Parte I degli Annali Idrologici, Sez. di Chieti, per gli anni suddetti, condotto sui singoli dati della quantità di pioggia caduta giorno per giorno,

parire del tutto l'area di così bassa piovosità, e tale zona mediana della Terra d'Otranto viene ad essere raffigurata con precipitazioni comprese fra i 500 e i 600 mm. annui. Di ciò, peraltro, si ha conferma nei valori che la stessa stazione di S. Pancrazio offre per il decennio che comincia col 1932 (dal quale anno sembra abbia iniziato le sue regolari osservazioni), valori che si mantengono generalmente superiori ai 500 mm. annui di precipitazioni.

Analogo dubbio sorge, nell'esame della tavola suddetta, osservando alcune zone costiere con piovosità inferiore ai 400 mm.: per lo più il tracciato di tale isoieta deriva dall'utilizzazione generica dei dati forniti dai semafori, che risultano spesso inesatti e di solito inferiori al vero. Zone costiere con così bassa piovosità sono segnate pure nella Puglia, una a sud di Taranto [1] e l'altra nella parte orientale del Tavoliere: entrambe, però, si fondano su osservazioni di assai dubbia attendibilità.

Una critica, pertanto, diretta a selezionare il materiale raccolto dalle varie stazioni pluviometriche e ad eliminare i dati sicuramente inesatti — i quali, per fortuna, si riducono a quelli forniti da uno scarso numero di località —, ci mette in grado bensì di confermare nei due tratti suddetti della regione pugliese-lucana (nel Tavoliere e nel litorale ionico) le aree di più scarsa piovosità in tutta l'Italia peninsulare, ma ci consente, nello stesso tempo, di attribuire a tali aree quantità medie di precipitazioni non inferiori ai 400 mm. annui: la zona del Tavoliere, infine, sembra, fra le due aree, quella a cui debba essere assegnato il valore più basso.

---

consente di porre agevolmente a confronto la stazione di S. Pancrazio con le altre stazioni vicine (Manduria, Avetrana, Sava, S. Pietro Vernotico) e di rilevare nella prima non solo le quantità quasi sempre scarsissime, ma spesso l'assoluta mancanza di precipitazioni in giorni in cui tutte le altre stazioni registrano, per contrario, valori anche notevolmente alti.

[1] Per tale zona sono stati tenuti presenti i dati forniti dalla stazione di Capo S. Vito, che risultano manifestamente assai al di sotto del vero in quasi tutti gli anni anteriori al 1929, sia se si confrontano con quelli della vicina Taranto sia se si paragonano con quelli della stessa stazione di Capo S. Vito registrati dal 1930 al 1935.

Il parossismo vesuviano del marzo 1944 [1]

Nota del socio corrispondente **Giuseppe Imbò**

(Adunanza del dì 5 dicembre 1944)

Sunto. — Dopo un cenno sull'andamento eruttivo vesuviano, viene data una breve relazione sulla successione dei fenomeni verificatisi nel corso sia del periodo eruttivo luglio 1913 marzo 1944 che del violento parossismo terminale del periodo che ebbe inizio il 18 e fine il 29. Se si esclude una fase immediatamente precedente il parossismo (tra il 12 ed il 18 marzo) e che potrebbe considerarsi una fase preparatoria, il parossismo è stato distinto in quattro fasi e cioè: fase effusiva, fase delle fontane, fase delle esplosioni miste, fase sismo-eruttiva. A queste segue una fase di chiusura del periodo, fase che va dalla fine del parossismo sino alla completa e definitiva ostruzione del condotto eruttivo, verificatasi il 17 aprile successivo.

Premessa. — L'attività vulcanica si manifesta attraverso un'estesa varietà di fenomeni i cui caratteri dipendono dall'azione contemporanea od isolata di vari fattori che sono a loro volta collegati: alcuni con le condizioni fisico-chimiche dei magmi, altri invece con condizioni esterne ad essi. Le cause agenti risultano pertanto notevolmente complesse in modo da avere una giustificazione dell'estrema diversità di tipi eruttivi nonchè della spiccata mutabilità dell'attività di un vulcano nel corso del tempo.

Qualora però le cause determinanti l'attività rimangano mediamente costanti, risulta ovvia la possibilità di mettere in evidenza per il vulcano considerato un andamento eruttivo tipico o normale, dal quale, s'intende, si scosteranno, spesso profondamente, gli andamenti reali che di conseguenza, pur seguendo nelle linee generali l'andamento normale, potranno presentare i fenomeni più svariati per natura ed intensità, con caratteristiche rivelanti solo analogie giammai identità.

Andamento eruttivo vesuviano. — Per il Vesuvio, la cui storia eruttiva

---

[1] Nella presente nota si dà solo una succinta descrizione dei fenomeni eruttivi verificatisi nel corso del parossismo vesuviano del marzo 1944. Appena le condizioni lo permetteranno, potranno essere pubblicate le memorie riportanti i risultati definitivi rilevati dalle osservazioni che mi fu consentito di effettuare e prevalentemente da quelle sismiche e sismo-tettoniche, altamente interessanti oltre che per l'importanza ed originalità delle deduzioni anche perchè per la prima volta si sono potute seguire a breve distanza dal vulcano e con opportuni registratori le vicende sismo-eruttive di un violento parossismo.

degli ultimi secoli risulta meno incompleta rispetto a tutti gli altri vulcani. il PALMIERI prima ed in seguito con maggiori dettagli il MERCALLI fissarono le linee generali dell' andamento normale dei fenomeni eruttivi. il quale si sintetizza nella presenza di intervalli di tempo, detti « periodi eruttivi », durante i quali si ha libera comunicazione del magma a più o meno profondità nel condotto eruttivo. con l' esterno. separati da intervalli di tempo. detti « periodi di riposo ». durante i quali l' attività centrale del vulcano. per l' ostruzione della bocca eruttiva, rimane sopita.

I periodi eruttivi. che si iniziano con la riapertura generalmente tranquilla della bocca. consistono nella ripetizione ordinata con sorprendente regolarità di una ben netta successione di fenomeni che possono essere così schematizzati: esplosioni determinanti la costruzione o ricostruzione di un conetto intracraterico; fratturazione o collasso di questo. totale o parziale. con fuoriuscite laviche e contemporanei fenomeni esplosivi: alternative nell' intensità dei due tipi di attività con decise recrudescenze e depressioni ma in media tendente ad una graduale riduzione sino alla scomparsa dapprima degli efflussi lavici ed in seguito anche dei fenomeni esplosivi: limitazione dell' attività centrale a sole emissioni tranquille di fumi; ripresa dei fenomeni esplosivi e quindi del ciclo con la ripetizione delle indicate manifestazioni.

A ciascun gruppo di fenomeni decorrenti tra due successive nuove fratturazioni del conetto od anche della platea lavica e persino di pareti laterali del Gran Cono, ho dato il nome di « intervallo eruttivo ». la cui intensità iniziale. a seconda della causa della fratturazione nonchè di altre condizioni. risulta variabile entro limiti abbastanza estesi: spesso la fase iniziale di un intervallo eruttivo assume carattere parossismale. Non sempre però un intervallo eruttivo presenta distintamente le fasi descritte. Vi sono difatti alcuni intervalli pei quali manca la fase esplosiva che li precede, come pure frequentemente risulta assente la fase di quiete intercorrente tra due successivi intervalli.

Durante il periodo eruttivo si nota in generale una tendenza ad un aumento nella intensità media dei fenomeni. dapprima rapida ed indi sempre più lenta sino a risultare (sempre. s' intende. mediamente) costante.

La fine di ciascun periodo. le cui durate risultano notevolmente variabili (fino al presente si è avuta una durata minima di appena 17 mesi ed una massima di 31 anni. la quale ultima corrisponde alla durata del periodo eruttivo chiusosi col parossismo del marzo 1944) coincide con l' ostruzione della bocca eruttiva aprentesi sul fondo di un cratere di esplosione e di sprofondamento formatosi nel corso del sempre violento parossismo di chiusura del periodo, il quale parossismo può risultare preminentemente effusivo, preminentemente esplosivo oppure quasi egualmente intenso nelle fasi effusiva ed esplosiva.

Periodo eruttivo 1913-1944. — Il periodo eruttivo chiusosi con il parossismo vesuviano del marzo 1944 ha avuto inizio il 5 luglio 1913 dopo circa sette anni di riposo. In seguito al violento parossismo dell'aprile 1906 il cono aveva perduto circa centocinquanta metri di altezza e si era avuta anche la formazione di un vasto bacino craterico, la cui profondità, appena dopo l'eruzione, fu stimata di oltre cinquecento metri e la capacità di circa 80 milioni di m³. All'atto della tranquilla riapertura della bocca di fuoco, il 5 luglio 1913, la profondità, per effetto delle frane interne verificatesi durante il periodo di riposo, già risultava di circa trecento metri.

In conseguenza delle successive sovrapposizioni del materiale eruttato il fondo del cratere subì un graduale sollevamento, dapprima evidentemente rapido, per effetto della forma ad imbuto, ed in seguito con sempre maggiore lentezza, nonostante un aumento sia nella portata che nella persistenza degli efflussi, specialmente dopo che dal 27 novembre 1926, per il raggiungimento dell'orlo più basso a ENE e successivamente anche di altri orli in varie direzioni, generalmente secondo l'ordine delle quote crescenti, le lave si riversarono frequentemente all'esterno.

All'inizio dell'eruzione del marzo, per la presenza di pareti crateriche, risultava ancora protetta da efflussi terminali, almeno inizialmente, la sola metà occidentale dell'edificio vulcanico con alcune interruzioni a W.

Prodromi del parossismo. — Già da qualche anno l'andamento eruttivo e sismico del vulcano lasciava prevedere prossimo il parossismo di chiusura, la cui imminenza negli ultimi mesi era ancora rilevata da alcuni indizi sempre sismo-eruttivi, da porsi presumibilmente in relazione con il raggiungimento da parte del magma di condizioni che potrebbero denominarsi critiche e che corrisponderebbero alla possibilità di violente degassificazioni anche negli strati episuperficiali magmatici per riduzione della pressione agente sopra essi.

Quest'ultima considerazione mostra la possibilità di parossismi occasionali alla quale categoria potrebbe appartenere il parossismo del marzo 1944. Esso è stato invero preceduto, a decorrere dal febbraio, da una graduale depressione nell'attività, concomitante ad un lento abbassamento magmatico nel condotto eruttivo (fig. 1). Non è un paradosso l'affermazione che appunto questo abbassamento e la conseguente riduzione nell'attività devono ritenersi la causa prossima del parossismo. Per mancato sostegno, nella notte dal 12 al 13 marzo si ebbe difatti il crollo del conetto già eroso da esalazioni acide e già parzialmente sgretolato nel corso della precedente fase esplosiva del gennaio-febbraio con formazione di una voragine e conseguente ostruzione del condotto eruttivo. Una parziale tranquilla riapertura si ebbe il 14 con ripresa di debole attività esplosiva, ma nelle prime ore del 18 altro crollo determinò una nuova ostruzione del condotto con la com-

pleta scomparsa anche delle esalazioni che attraverso crepacci si erano manifestate nel corso della prima ostruzione.

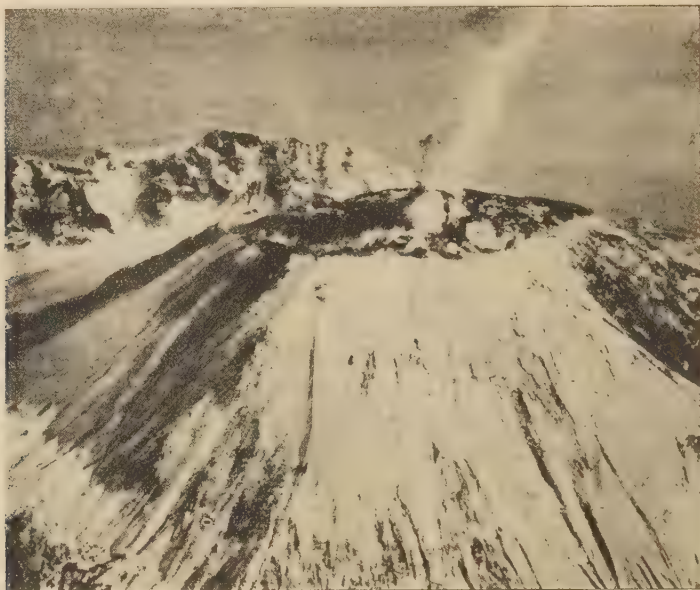



Fig. 1. — Il Gran Cono Vesuviano ed il cratere durante il febbraio 1944. Si distinguono nettamente sulla piattaforma craterica per il colore scuro le lave sgorgate dal 6 gennaio nel settore nord-occidentale e che si spinsero all' esterno a sinistra della linea della funicolare, ben marcata in primo piano.

1.ª Fase: Fase effusiva terminale. — La brusca riapertura del condotto a $16^h 30^m$ del 18, seguito da immediato rigurgito lavico segna l' inizio del parossismo e precisamente della prima fase ossia della « fase effusiva terminale ». Le lave, dopo aver colmato la piccola voragine, traboccarono dall' orlo orientale di essa, riversantisi sulla platea lavica e successivamente suddividentisi in diverse contigue lingue che tutte si spinsero all'esterno nella zona orientale tra il N ed il SSE. La maggiore copiosità e velocità fu però presentata dalle sole due estreme, dirette rispettivamene a N ed a SSW. La prima raggiunse in meno di mezz'ora le pareti del Somma a ponente del Canale dell' Arena ed indi piegò ad W, avanzando lentamente verso il Fosso della Vetrana. L' altra, più copiosa, dopo aver invaso tutto il settore meridionale della platea, in parte si riversò con ampio fronte all' esterno ed in parte, per l' ostacolo delle pareti crateriche a SSW, piegò a N costeggiando le dette pareti e dilagando sulla platea stessa. Nuove lingue esterne ebbero così origine man mano che venivano raggiunti punti bassi dell' orlo o colmati gli iniziali dislivelli tra platea e bordo craterico. Una

prima lingua lavica secondaria debordò ad W a 23^h del 18 (fig. 2). In pochi istanti essa raggiunse la base del Gran Cono interrompendo il tratto Eremo-Funicolare Inferiore della Ferrovia vesuviana per oltre cinquanta metri. Successive lingue laviche, egualmente effimere, traboccarono all'esterno secondo altre direzioni nella stessa sera del 18 ed anche nelle giornate del 19, 20, 21.

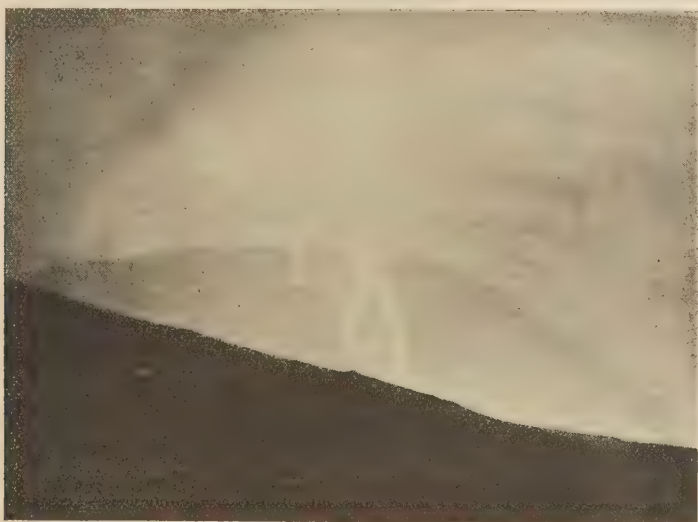



Fig. 2. — Le prime lingue laviche debordanti lungo il fianco occidentale del Gran Cono (18 marzo 1944).

Il ramo principale, riversatosi all'esterno verso S, notevolmente rapido nella serata del 18 e con velocità alquanto ridotta nei giorni successivi, suddiviso ancora in diverse lingue, si spinse a valle presso a poco in direzione delle Bocche del 1760. Le lave si arrestarono il 21 ad una quota di circa 300 metri.

La velocità di avanzamento del ramo principale settentrionale risultava invece la sera del 18 relativamente bassa. A $22^h\,30^m$ il fronte lavico trovavasi ai piedi della Punta del Nasone e si spingeva verso W con velocità inferiore ai 10 m/ora. Per un aumento durante la notte nella portata delle lave alimentanti tale ramo, si ebbe un aumento nella copiosità e nella velocità, in modo che a 11^h del 19 il fronte lavico raggiunse il margine occidentale dell'Atrio, e le lave incominciarono a riversarsi rapidamente lungo il Fosso della Vetrana (fig. 3).

Quasi contemporaneamente, in conseguenza di potenti rigurgiti lavici nel condotto eruttivo, si ebbe un aumento nell'attività esplosiva terminale, già eccezionalmente intensa fin dall'inizio del parossismo. I lanci di: lapilli,

scorie, brandelli lavici, ad altezze maggiori dei 150 metri, divennero oltremodo copiosi e così frequenti da potersi considerare continui. Questo primo incremento nell'attività esplosiva fu seguito, dopo una lieve riduzione nella intensità, da altro ancora più violento tra le $13^h\ 15^m$ e le $13^h\ 40^m$, alla cui

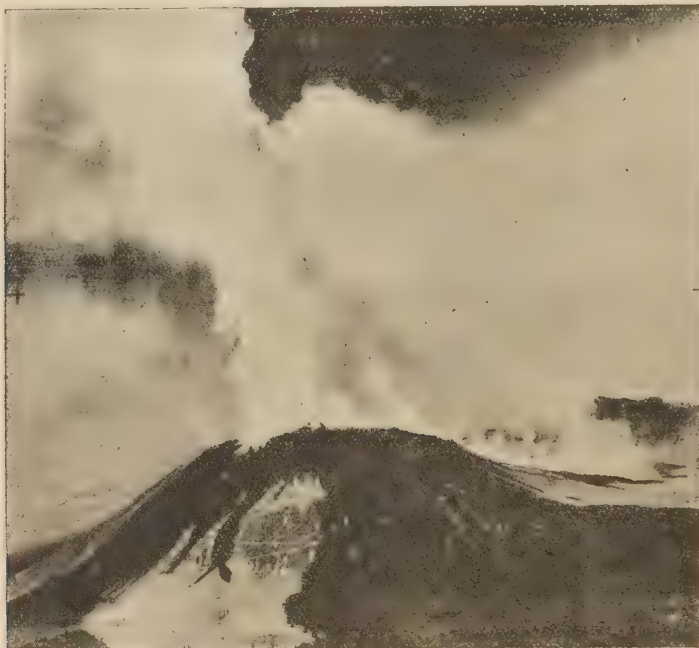



Fig. 3. — Le lave direttamente sgorganti dalla estremità superiore del condotto si dirigono a N, traboccano all'esterno e successivamente, all'incontro con le pareti del Somma, piegano ad W. Il percorso è indicato dai fumi. Risulta visibile anche il conetto, sventrato ad E (parte anteriore) in accentuata attività esplosiva (19 marzo 1944).

brusca cessazione venne raggiunta la medesima stazionaria intensità esplosiva della mattinata. Successivamente si ebbe un lento e graduale aumento nell'intensità sino ad assumere nelle prime ore del 20 un valore che subì in seguito solo lievi variazioni (a carattere oscillante) attorno ad un valore medio dapprima quasi costante e dalle prime ore del 21 presentante anche lievissima graduale riduzione. I massimi non furono inferiori per intensità a quella della poderosa recrudescenza esplosiva del pomeriggio del 19.

Un medesimo e contemporaneo andamento si ebbe nelle variazioni delle portate laviche iniziali. Nella notte sul 20 si ebbe un nuovo copiosissimo e velocissimo efflusso lavico che, sovrapponendosi alla colata settentrionale, già quasi irrigidita ed a superficie depressa, si diresse rapidamente a valle. A $6^h\ 30^m$ le lave si riversavano lungo il fosso della Vetrana ed a $8^h\ 30^m$ si erano affacciate al margine superiore del Fosso di Faraone. Nel

pomeriggio la portata media delle lave, a monte del Colle Margherita, fu valutata in circa 200000 m^3/ora mentre all'imboccatura dell'Atrio risultava di circa 100000 m^3/ora. Nella serata il fronte lavico distava circa 500 metri dalle zone abitate di San Sebastiano e Massa, raggiunte nelle prime ore del 21 e coperte dalle colate nella stessa giornata per oltre i due terzi (fig. 4). All'altezza dei due centri la corrente si divise in due rami, ambedue diretti presso a poco a NW ed avanzanti con velocità da 50 a 100 m/ora e minaccianti Cercola da cui in serata distavano circa km. 1,5.

Fig. 4. — Le lave invadono la borgata di Massa (21 marzo 1944).

Da un ramo secondario, ottenuto per confluenza di due lingue laviche dipartitesi dalla corrente principale, rispettivamente ai margini superiore ed inferiore del Fosso di Faraone, ed avanzante con uguale velocità della colata principale, però alquanto più ad W, si era staccata altra lingua lavica che investì nel pomeriggio del 21 il piazzale della Stazione Centrale della Ferrovia e Funicolare Vesuviana e si arrestò nella serata stessa a ridosso dell'edificio della Centrale elettrica, che venne pertanto appena lambito dalla colata (fig. 5).

2.ª *Fase: Fase delle fontane laviche.* — La seconda fase ebbe inizio a $17^h 15^m$ del 21 determinando l'immediata cessazione dell'alimentazione lavica, in modo che i successivi effimeri avanzamenti delle colate furono provocati solamente da lave già precedentemente sgorgate.

La nuova fase che può essere denominata la « fase delle fontane laviche » è rappresentata da discontinui violenti rigurgiti lavici, rivelati dalla elevazione della colonna magmatica fino ad altezze non inferiori al chilometro. Il materiale proiettato, suddiviso in: brandelli lavici, scorie, lapilli,

ceneri, in gran parte ricadeva o si riversava dalla platea lavica sotto forma di pseudocolate lungo i fianchi del Gran Cono, che, annottando, apparvero picchiettati di zone o macule incandescenti.

Scorie e lapilli raggiungenti le maggiori altezze, per azione prevalentemente del vento in quota, si riversarono specialmente nella zona di Angri

Fig. 5. — Vista d' insieme del versante interessato dalle colate laviche settentrionali, delle quali è nettamente visibile il percorso a valle del margine superiore del Fosso di Faraone (depressione tra l' estremità destra delle pareti del Somma ed il Colle dei Canteroni sulla cui cima è costruito l' Osservatorio — in figura sono visibili, a destra, appena sottostante il Gran Cono, le sole pareti occidentali del Colle). All' altezza dei due centri abitati di Massa (a sinistra) e di S. Sebastiano (a destra), parzialmente coperti dalle lave, la colata si bipartisce. Ambedue i rami si dirigono verso Cercola (che appare in primo piano).
È nettamente discernibile l' aumento di altezza del Cono per effetto prevalentemente delle prime fasi esplosive con spostamento verso l' asse eruttivo del bordo craterico specialmente nord-orientale, ove è raggiunta un' altezza oltrepassante i 1300 m. Una irregolarità nella parte del profilo del Gran Cono guardante il Somma indica la posizione primitiva del bordo (23 marzo 1944).

e Pagani, mentre le ceneri si spinsero sempre nella medesima direzione (tra E e SE) fino ad oltre i 200 km.

La prima fontana durò poco meno di un'ora, la massima violenza si ebbe però all'incirca nei soli primi quindici minuti. Essa fu seguita da completa cessazione delle manifestazioni eruttive. Anche i sismografi rientrarono in perfetta calma, mentre fin dalla mattina del 19 i continui moti sismici, ad intensità presso a poco costante, erano stati avvertiti dai residenti all'Osservatorio in modo del tutto simile (anche negli effetti), a periodo però alquanto minore, al rullio di una barca in mare agitato. Durante le crisi esplosive la violenza dell'agitazione sismica era tale da riuscire impossibile alle persone di muoversi senza appoggio.

Alla prima seguirono altre sette fontane ad intervalli non costanti e di durate anch'esse variabili: tutte però inferiori all'ora, ad eccezione dell'ultima che ebbe una durata di oltre cinque ore. Essa però, per le spiccate variazioni nell'intensità con decisi massimi e minimi, può ritenersi una successione continua di diverse fontane.

Ciascuna fontana era preceduta e seguita da variazioni quasi graduali nell'intensità (copiosità ed altezze dei lanci) delle manifestazioni esplosive, che in genere presentavano un andamento per lo più costante, spesso intervallate da depressioni e recrudescenze con netti distinti lanci.

I continui e violenti innalzamenti della colonna lavica erano accompagnati da potente ed assordante muggito al quale si sovrapponevano rumori di ogni sorta dal brontolio del tuono all'urto fragoroso di masse metalliche, a scariche continue di grossi pezzi di artiglieria.

Un fenomeno meraviglioso luminoso-acustico, osservato solo dalle poche persone che restarono all'Osservatorio, e che solo per la seconda volta appare nella descrizione dei parossismi vesuviani, precedeva di poco la fine di ciascuna fontana. Esso consisteva nell'apparizione subitanea di un tratto di arco rivolgente sempre la concavità verso la bocca eruttiva, ed assumente una tinta decisamente grigia molto chiara, quasi bianchiccia, di giorno e giallo-pallida (riduzione nella vivacità dei bagliori) di notte, marcata nella zona arcuata centrale e gradualmente sfumante verso i bordi. Gli archi erano nettamente distinguibili per la loro fugacità. Dopo la comparsa, indifferentemente rispetto alla posizione, sempre però ad una distanza di poco oltre una cinquantina di metri dal centro eruttivo, essi mostravano un rapido moto divergente. Per un solo arco mi è sembrato di osservare un moto divergente seguito da moto convergente. L'identificazione dell'arco luminoso con un'onda acustica è basata sul fatto che una variazione notevole di pressione (con potente soffio, derivante del violento passaggio di aria attraverso le fessure delle finestre) era constatata all'Osservatorio dopo un intervallo di poco oltre i 7^s dalla comparsa dell'arco e precisamente dopo l'intervallo di tempo che avrebbe impiegato un'onda acustica a percorrere la distanza separante l'Osservatorio dalla bocca eruttiva.

Nessun lancio di proiettili accompagnava l'apparizione degli archi in modo da ritenere che questi fossero in relazione a pure brusche emissioni

di aeriformi, delle quali però nessuna conferma può aversi dalle osservazioni direttamente eseguite, nonostante la frequente ottima visibilità della bocca eruttiva. La luminosità dell'arco, a mio parere, deve attribuirsi a fenomeno di diffusione.

3.ª Fase: « Fase delle esplosioni miste » 1.° Tempo. — Poco dopo le 12ʰ del 22 si ebbe un graduale ma rapido cambiamento nella natura del materiale eiettato. Oltre a materiale coevo incandescente venne proiettato anche

Fig. 6. — Emissione continua di ceneri sopraelevantisi in ampie volute e pieganti a E per azione del vento (da Pomigliano, 24 marzo 1944).

materiale coevo scuro e materiale proveniente dalla incipiente demolizione della impalcatura craterica, isolato od anche avvolto da guaina di lava coeva. La distinzione della nuova fase, ossia della « fase delle esplosioni miste », dalla fase precedente è netta per la brusca notevole preponderanza di ceneri scure elevantisi vertiginosamente in ampie volute oppure verticalmente da vari punti della bocca eruttiva, assumenti forme di maestosi cipressi o anche di guglie di duomi fantastici (fig. 6).

L'altezza del pino fu stimata dall'Osservatorio (certamente per difetto) non inferiore ai 3000 metri dall'orlo del cratere, ma si hanno sicure informazioni che essa dovette oltrepassare i 5000 metri [1].

Altra netta caratteristica distintiva della nuova fase è rappresentata da una notevole proiezione di bombe, delle quali alcune esplodevano durante il moto con la formazione di nubecole bianche, altre all'urto contro il suolo

---

[1]) Aviatori levatisi in volo da Capodichino hanno asserito che il vertice del pino oltrepassava i 20000 piedi sul livello del mare.

con vistosi sbrandellamenti e sollevamenti di alte colonne di materiale detritico. Alcune bombe probabilmente esplosero nella sala d'aspetto della Stazione Inferiore della Funicolare, provocando incurvamenti delle pareti che presentano tutte la concavità verso l'interno. Le pseudocolate della fase delle fontane furono sostituite da valanghe calde o da nubi ardenti in miniatura a seconda che il movimento lungo i fianchi del monte fu deter-

Fig. 7. — Violenta esplosione cinerea. Copiose masse cineree si depositano su vari punti del bordo occidentale del cratere, con tendenza a spingersi lungo il fianco esterno del Gran Cono (24 marzo 1944).

minato dalla sola azione della gravità oppure prevalentemente dalla tensione degli aeriformi racchiusi nel materiale eiettato. Le prime si verificarono sia nell'istante della caduta del materiale sia in momenti successivi per effetto di moti sismici o di una comunque rottura delle condizioni di equilibrio instabile. Le seconde erano da porsi in relazione al depositarsi, spesso probabilmente anche per effetto di proiezioni oblique, di ingenti masse, quasi esclusivamente di ceneri, sull'orlo del monte, le quali, sormontate da nubi cineree e trascinanti materiale incontrato, scivolavano lungo i fianchi del Gran Cono spingendosi ad elevatissima velocità fino alla base di questo ed oltre (figg. 7, 8, 9).

Una caratteristica della terza fase è rappresentata dalle scariche elettriche che invero, in concomitanza di violente eiezioni cineree, non sono

mancate nella seconda; ma in questa esse risultarono trascurabili rispetto al numero ed alla varietà di forma e di colorazione osservata durante la fase delle esplosioni miste.

Nè nel corso della terza fase sono mancate le manifestazioni degli archi acustici-luminosi con le medesime particolarità già precedentemente indi-

Fig. 8. — Momento successivo della precedente figura. Le masse cineree sopraelevate da nubi cineree gibbose si spingono in diverse lingue rapidamente a valle prevalentemente per spinta degli aeriformi in esse racchiusi, trascinando tutto il materiale caotico incontrato. Nubi ardenti in miniatura. (23 marzo 1944).

cate. Furono precisamente soffi, indicatori, come già è stato detto, delle descritte manifestazioni, i quali, dapprima radi e piuttosto deboli tra le 14^h15^m e le 17^h, indi forti ed a brevi intervalli fino a 17^h38^m (nel quale istante si verificò un soffio fortissimo) annunciarono la fine del primo tempo della terza fase, che avvenne a 17^h55^m.

Analogamente a quanto si ebbe ad osservare dopo la prima fontana lavica, alla cessazione del primo tempo subentrò calma sismica ed eruttiva.

Le manifestazioni esplosive avutesi nel corso del primo tempo insieme a quelle dell'ultima fontana lavica raggiunsero le più alte intensità, sia nel valore medio che in quello massimo, osservate durante lo svolgersi dello

intero parossismo, di modo che l'intervallo di massima violenza esplosiva ha avuto una durata di circa dieci ore.

Fig. 9. — Ultimo stadio della nube ardente. Il moto delle ceneri si arresta e prevale lo sviluppo degli aeriformi dalle masse eruttate ad alta temperatura. (24 marzo 1944).

Variazioni di forma della parte terminale del cono vulcanico. — Per effetto della violenza delle esplosioni e dell' accumulazione del materiale eiettato la parte terminale del cono già presentava notevoli trasformazioni. I poderosi ribaltamenti lavici tutt'intorno alla ricolma conca craterica formatasi in seguito al collasso del conetto, nonchè la continua sovrapposizione dei prodotti esplosi sulla platea lavica per un raggio di oltre cento metri dall'asse eruttivo e con spessori crescenti all'avvicinarsi ad esso, e sui resti delle pareti del conetto, specialmente di quelle occidentali (le sole che, nonostante il crollo totale di quelle orientali e parziale delle altre, erano rimaste quasi integre), avevano, fin dalla sera del 18, dato inizio alla ricostruzione del conetto a larga base ed a pareti interrotte secondo la direzione degli efflussi.

La mattina del 19 la cima del conetto era già visibile dall'Osservatorio, raggiungendo nella medesima giornata un'altezza massima di circa 1260 m.,

ossia la massima altezza che la cima del conetto aveva raggiunta nel corso del periodo eruttivo e precisamente nel secondo trimestre del 1943. Alternative di crolli e sollevamenti della cima si ebbero fino all'inizio della seconda fase, al cui presentarsi tutto il conetto fu proiettato insieme al materiale coevo e la bocca, come era deducibile dalla sezione della colonna lavica alla sua base, aveva subito un immediato allargamento. Del copiosissimo materiale eiettato quello riversantesi sulla platea in parte si andava accumulando tutt'intorno alla bocca eruttiva, in parte si riversava sotto forma di pseudocolate lungo i fianchi esterni del Gran Cono.

Si ebbe così un rapido aumento di quota dell'orlo accompagnato da riduzione del perimetro craterico. Nel pomeriggio del 22 già il cono eruttivo era saldato al Gran Cono. La quota massima certamente superò i 1300 m., raggiungendo forse quella massima avuta dal cono vesuviano prima del parossismo del 1906. Essa si presentava a NE ove il dislivello, rispetto all'orlo primitivo, era di circa 150 metri; mentre questo dislivello era minimo, e di solo una cinquantina di metri, nella zona sud-occidentale. La maggiore accumulazione di materiale nella zona nord-orientale, in apparente contrasto con la caduta di proiettili prevalentemente nelle zone sud-orientali, deve porsi in relazione principalmente con l'eccentricità dell'asse eruttivo situato a SW dell'asse craterico ad una distanza di circa cento metri e precisamente deve ritenersi una conseguenza della diminuzione da NE a SW in ambedue le direzioni dell'estensione delle zone intracrateriche a relativamente debole pendenza o quasi pianeggianti.

2.° Tempo della terza fase. — Dopo una pausa di tre ore circa, a 21^h ebbe inizio il secondo tempo della terza fase con esplosioni presentanti le medesime caratteristiche osservate per il primo tempo, ma che la notte rese più appariscenti. Si ebbe così l'opportunità di osservare: la maestosità, le notevoli frequenze e varietà delle scariche elettriche, la presenza nei lanci di ceneri scure ed incandescenti con prevalenza sempre crescente delle prime rispetto alla quantità delle ceneri incandescenti e degli altri proietti.

Fin dall'inizio del secondo tempo le bocche, indipendentemente attive, erano almeno due. I tronchi dei due pini apparivano presso a poco al margine settentrionale e meridionale del bordo craterico, però le cuspidi cineree dipartivansi contemporaneamente da diversi punti dell'apertura craterica.

L'intensità dell'attività esplosiva raggiunse con quasi gradualità nelle prime ore del 23 un valore quasi eguale a quello massimo del primo tempo e successivamente con alternative di recrudescenze o depressioni presentò una netta ma graduale riduzione nel valore medio.

4.ª Fase: Fase sismo-esplosiva. — Verso le 12^h del 23, pur non osservandosi alcuna sensibile brusca variazione nel carattere esplosivo, le più

o meno violente proiezioni si verificarono con discontinuità e con prevalenza sempre crescente di materiale scuro antico o coevo su quello incandescente. Esse furono intervallate: da continue esalazioni trascinanti ceneri scure che in ampie volute si elevavano fino ad altezze non inferiori ai 2 km. sul-l'orlo del cratere e da frequenti sismi la cui relazione con l'attività esplosiva era rilevata dal fatto che le più intense scosse o i maggiori addensamenti di esse, verificatisi specialmente all'inizio della fase, precedevano di poco, accompagnavano od anche chiudevano le recrudescenze esplosive. Soltanto durante queste effimere intensificazioni esplosive si verificarono: riapparizioni di riverberi, lanci di materiale incandescente, riversamenti sui fianchi esterni di nubi ardenti o valanghe, contemporanee molteplici apparizioni di scariche elettriche.

Questa nuova fase, che denomino « fase sismo-esplosiva », deve probabilmente porsi in relazione con frequenti ostruzioni del condotto per sprofondamenti terminali oppure con l'irrigidimento parziale della parte estrema della colonna magmatica con conseguente possibilità di addensamenti di aeriformi al di sotto della crosta sino alla rottura.

Le ceneri della quarta fase ed in particolare modo quelle proiettate all'inizio, furono più chiare di quelle proiettate in antecedenza. Nella tardi mattinata del 24 il Gran Cono sembrò ammantato di neve.

Una brusca intensificazione nell'attività si verificò dalle 10^h30^m del 25. Essa però deve ritenersi più apparente che reale in quanto accompagnata dall'improvviso spirare di un forte vento di NNE che, nell'obbligare le ceneri a quasi scorrere lungo il fianco sud-sud occidentale, ne impedì la diffusione e di conseguenza le ceneri si riversarono quasi totalmente entro una strettissima striscia a SSW del vulcano, mentre, se fosse continuato il debole vento, la intensità della pioggia di ceneri, per la evidente maggiore estensione delle zone interessate, nonchè a causa delle maggiori altezze che esse avrebbero raggiunte, sarebbe stata per nulla paragonabile a quella delle giornate precedenti. La frequenza o la intensità dei rinforzi andarono via via diminuendo. Le scariche elettriche divennero sempre più scarse e dal 26 non se ne osservarono più, nonostante che si ebbero ancora violente proiezioni di ceneri e proietti scuri. Furono appunto queste proiezioni che permisero di svelare l'obliquità dei lanci in direzione NNE, in quanto che per l'azione crivellatrice del vento le traiettorie controvento erano seguite dai soli grossi proietti, mentre le ceneri venivano convogliate a SSW. La costanza della direzione può essere spiegata solo con l'ammissione di una obliquità del condotto eruttivo almeno fino alla zona di esso interessata nel corso della quarta fase e questa deduzione è altamente interessante in quanto essa coincide con deduzioni eseguite in altre occasioni sia in base ad analoghe osservazioni, sia in base a criteri del tutto indipendenti.

Fase finale. — Al ridursi della velocità del vento ne giorno 27, anche i fenomeni esplosivi apparvero nella loro reale intensità. Le pioggie di ceneri cessarono quasi completamente e gli sbuffi si resero sempre più radi sino a che gradualmente si passò alla fase delle lente ed esili esalazioni. Questa fase può ritenersi incominciata il 29 e segna il passaggio dal parossismo al periodo di riposo.

Una notevole recrudescenza nel periodo sismico si ha nelle prime ore del 27 ed essa coincide con l' inizio della fase delle frane. Il mattino del 27 l' orlo craterico, specialmente quello occidentale, apparve difatti notevol-

Fig. 10. — Il Gran Cono dopo la fine del parossismo nei primi giorni del periodo di riposo. I fumi esalati dal materiale eruttato ancora caldo e ceneri sono trascinati a SW dal forte vento di NE. È nettamente visibile al piede delle pareti del Somma la colata prima diretta a N e poi piegante ad W. Confrontare con la figura 3 riproducente il Gran Cono visto presso a poco secondo la medesima direzione prima che la parte terminale del cono subisse le profonde trasformazioni provocate dal parossismo. Ai piedi del Gran Cono sono visibili e ricoperte di ceneri le testate delle colate di ceneri e massi caotici, derivanti alcune da nubi ardenti altre da valanghe calde. (23 aprile 1944).

mente più basso del giorno precedente. Essa deve pertanto ritenersi la probabile causa dei rilevanti crolli terminali.

Proiezioni all' inizio, sprofondamenti e proiezioni in seguito, soli crolli in fine per mancato sostegno, avevano determinato la formazione del vasto cratere che, osservato il giorno 29, presentava una profondità, rispetto all' orlo occidentale, non inferiore ai 300 metri ed un perimetro di circa 1,6 km., con una capacità di circa 25 milioni di m^3 (fig. 10).

Dal 29 marzo la bocca eruttiva dalla quale si avevano continue proiezioni di ceneri ad altezze però di solo qualche metro, subì continue ostruzioni (per la caduta del materiale derivante da frane) e successive riaperture, finchè dal 7 aprile la bocca è rimasta permanentemente chiusa. Solo qualche

giorno dopo, sul fondo del cratere, si sono aperti crepacci da cui si svolgevano lievi esalazioni.

Alla detta data deve pertanto ritenersi incominciato il periodo di riposo. La fase sismica però con stasi e lievi recrudescenze, alle quali corrispondono intensificazione nel distacco di frane, continua tuttora.

Alla chiusura del periodo eruttivo quasi immediatamente, e probabilmente qualche giorno avanti, nelle solite zone di Resina e Portici apparvero le mofete con le medesime caratteristiche osservate in occasione della quasi totalità dei precedenti parossismi pei quali è stato descritto il fenomeno. Esse apparvero, difatti, almeno con intensità tale da rendersi apprezzabili, dapprima più a monte (zona dei Tironi) e successivamente, a brevissimo intervallo però, a quote decrescenti. L'altezza dello strato di acido carbonico subisce una variazione sia giornaliera che nel tempo, prevalentemente in relazione a vicende meteorologiche (pressione, vento).

Caratteristiche principali del parossismo. — Una spiccata analogia sia per direzione delle colate, sia per la successione dei fenomeni può essere rilevata tra il presente parossismo e quello del 1872. Mentre però per quest'ultimo la colata principale sgorgò da bocche apertesi nell'Atrio del Cavallo alla base di una fenditura interessante il fianco settentrionale dell'edificio, per il parossismo del 1944 tutte le lave si riversarono dall'apertura estrema del condotto eruttivo; i due parossismi appartengono perciò a due distinte categorie, in quanto il primo è laterale mentre il secondo è tipicamente terminale. Questa diversità tra i due parossismi, oltre a mostrare la possibilità di un nuovo tipo di parossismo di chiusura di periodo eruttivo (tipo 1944), in quanto solo per la prima volta un periodo eruttivo vesuviano è chiuso con un parossismo esclusivamente terminale, deve ritenersi, per l'eruzione del marzo ultimo, la causa fondamentale anche della netta separazione delle fasi eruttive, specie tra fase effusiva e quella esplosiva, con elargizione di materiale coevo attinto sempre e sicuramente a maggiori profondità. Alle enunciate caratteristiche deve ancora aggiungersi l'altra del sicuro inizio occasionale del parossismo, anch'essa permettente di porre in rilievo per la prima volta la possibilità di un nuovo tipo di parossismo.

L'insieme però dei fenomeni rientra nel quadro generale dei tipici andamenti parossismici vesuviani, dando un valido appoggio alla conclusione sintetizzante le vedute degli studiosi del Vesuvio (in particolare per il vulcano partenopeo, ma che con opportune considerazioni può costituire una legge generale regolante i dinamismi eruttivi) e dalla quale potrebbe infatti rilevarsi che nel corso di un parossismo, qualunque sia stata la causa che l'abbia determinato (riduzione di pressione esterna od aumento di pressione interna), i fenomeni si susseguono sempre nel medesimo ordine, purchè non intervenga alcuna perturbazione che tende a modificarlo.

Caratterizzazioni statistiche della pioggia totale annua di Napoli pel periodo 1866-1925

Nota di **Tito Nicolini**, *presentata dal socio* **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 2 gennaio 1945)

Sunto. — In questa nota si prendono in esame i 60 valori della pioggia totale annua in Napoli pel periodo 1866-1925, classificati per intervalli successivi di ampiezza 33 mm. Facendo uso dei metodi ordinari della statistica, si determinano i parametri della distribuzione di frequenza, provando sia l'adattamento del tipo normale, sia quello di una serie A di Gram-Charlier; si constata che quest'ultima ha un vantaggio reale, data l'apparenza sensibilmente leptocurtica (appuntita) ed obliqua della distribuzione. La nota ha lo scopo non solo di caratterizzare adeguatamente la statistica considerata, ma anche di permettere la valutazione delle probabilità di importi annui di pioggia compresi tra determinati limiti.

È in programma al R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte una analisi complessiva delle osservazioni meteorologiche ivi effettuate, e raccolte in due memorie [1]) pel periodo 1866-1925, mentre pel periodo 1926-1940 sono in corso le riduzioni delle osservazioni. In attesa dell'auspicato ritorno di condizioni favorevoli, che permettano l'esecuzione e la stampa dell'ampio lavoro rielaborato in sostituzione ed approfondimento delle vecchie memorie riferite (ormai esaurite per le continue richieste), questa nota preliminare si propone un esame della distribuzione di frequenza della pioggia annuale (pp. 72 e 47 rispettivamente delle memorie citate).

In generale 60 valori non sono molti per una indagine statistica rigorosa; ma d'altronde qui essi rappresentano totali annuali, e ricerche elaborate sono state effettuate anche con 60 osservazioni e con buon successo [2]); quindi si possono considerare con fiducia i dati; ciò che del resto il compimento della ricerca, soddisfacente come altre analoghe, dimostrerà.

Qui si conviene di classificare gli importi annui di pioggia per intervalli

---

[1]) V. Alberti, *Sul clima di Napoli* (*1866-1900*). Napoli, Società Cooperativa Tipografica, 1901. — S. Aurino, *Sul clima di Napoli* (*1901-1925*). Roma, Istituto Poligrafico dello Stato, 1935.

[2]) V. p. es. A. T. Doodson e H. J. Bigelstone, *The frequency distribution of rainfall at Liverpool Observatory*. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., Oct. 1934, p. 403. — R. T. Zoch, *On the frequency distribution of rainfall at the Liverpool Observatory*. Idem, Jul. 1936, p. 421. Questi autori seguono i metodi pearsoniani.

di 33 mm. Per passare alle caratterizzazioni della rappresentazione normale, cioè al calcolo della media e della dispersione (scarto quadratico medio), conviene, con metodo usuale nella pratica statistica, assumere per origine l'ascissa media di un intervallo arbitrario prossimo alla media delle osservazioni. e per unità l'ampiezza degli intervalli. Così, assumiamo l'origine in corrispondenza a mm. 833.33; unità corrispondente a mm. 33.33.

Nella tab. I, *i. a.* sono gli importi annui di pioggia in mm., n le frequenze, x gli scarti di prova (o ascisse) rispetto alla nuova origine e unità; le colonne seguenti si riferiscono alle potenze successive degli scarti, e se ne vedrà l'uso appresso. Le s indicano le somme delle colonne soprastanti, o somme delle potenze successive degli scarti.

Rispetto all'origine ed unità scelte, la media sarà:

$$m = \frac{\Sigma nx}{\Sigma n} = \frac{s_1}{60} = -0.05.$$

Quindi la media complessiva della pioggia in mm risulta:

$$M = 883.33 - 0.05\,(33.33) = 881.67 \text{ mm.}$$

Ma ora ci interessano non le s, ma le somme S delle potenze successive degli scarti presi rispetto alla media vera M, e per questo si usano le semplici formole di riduzione algebrica:

$$S_2 = s_2 - \frac{s_1^2}{s_0}; \quad S_3 = s_3 - \frac{3s_1 s_2}{s_0} + \frac{2s_1^3}{s_0^2}; \quad S_4 = s_4 - \frac{4s_1 s_3}{s_0} + \frac{6s_1^2 s_2}{s_0^2} - \frac{3s_1^4}{s_0^3}.$$

I risultati numerici sono in fondo alla tabella stessa. L'ultima riga della tabella stessa dà i *momenti* rispetto alla media $M\left(\mu_r = \frac{S_r}{s_0}\right.$; questi valori sono stati corretti delle correzioni di aggruppamento, o di Sheppard, ma data la piccola ampiezza degli intervalli, queste lievi alterazioni sono insignificanti al nostro scopo$\left.\right)$.

Si deduce subito il valore della dispersione (scarto quadratico medio) in termini dell'unità prescelta di 33.3 mm, e quindi in mm:

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = 5.04\ u. \equiv 168 \text{ mm.}$$

Ora, per avere un primo giudizio approssimato delle deviazioni della distribuzione dal tipo normale, si può ricorrere seguendo il criterio del PEARSON, adatto per varî tipi di distribuzione, ai due parametri seguenti:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0.26 \qquad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 4.80.$$

Tab. 1ª — Somme delle potenze degli scarti rispetto alla media di riferimento 883.33 mm ed alla media effettiva M = 881.67 mm.

i. a. mm.	n	x	nx	nx^2	nx^3	nx^4
400	1	— 14	— 14	+ 196	— 2744	+ 38416
433	—	13	—	—	—	—
467	—	12	—	—	—	—
500	—	11	—	—	—	—
533	—	10	—	—	—	—
567	1	9	— 9	+ 81	— 729	+ 6561
600	2	8	16	128	1024	8192
633	1	7	7	49	343	2401
667	1	6	6	36	216	1296
700	5	5	25	125	625	3125
733	1	4	4	16	64	256
767	3	3	9	27	81	243
800	7	2	14	28	56	112
833	4	— 1	— 4	+ 4	— 4	+ 4
867	6					
900	11	+ 1	+ 11	+ 11	+ 11	+ 11
933	5	2	10	20	40	80
967	4	3	12	36	108	324
1000	1	4	4	16	64	256
1033	—	5	—	—	—	—
1067	2	6	12	72	432	2592
1100	1	7	7	49	343	2401
1133	1	8	8	64	512	4096
1167	—	9	—	—	—	—
1200	—	10	—	—	—	—
1233	—	11	—	—	—	—
1267	1	12	12	144	1728	20736
1300	1	13	13	169	2197	28561
1333	—	14	—	—	—	—
1367	—	15	—	—	—	—
1400	1	+ 16	+ 16	+ 256	+ 4096	+ 65536
1433						
	$s_0 = 60$		$s_1 = -3$	$s_2 = 1527$	$s_3 = 3645$	$s_4 = 185199$
			$S_1 = 0$	$S_2 = 1527$	$S_3 = 3874$	$S_4 = 185951$
				$\mu_2 = 25.36$	$\mu_3 = 61.57$	$\mu_4 = 3086.49$

In una distribuzione normale, $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 3$. Quindi si ha una distribuzione sensibilmente obliqua, con *obliquità* (di cui la valutazione si può dare anche con l'intervallo tra media e moda diviso per la dispersione) data dall'espressione del PEARSON:

$$\text{ob.} = \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)} = 0.15.$$

Inoltre la distribuzione è accentuatamente *leptocurtica*, cioè appuntita (con frequenze più addensate verso la moda che non si abbia nel tipo normale), e l'*eccesso* è:

$$e = \beta_2 - 3 = 1.80.$$

Ma questi elementi di apparenza convenzionale e arbitraria pel confronto colla distribuzione normale, sono molto meno utili dei parametri di una serie A di GRAM-CHARLIER, capaci di caratterizzare in modo utile, comprensivo e matematicamente soddisfacente ampie classi di distribuzioni.

Una serie di questo tipo, ha la forma:

$$y = \varphi_0(z) + A_3\,\varphi_3(z) + A_4\,\varphi_4(z) + \ldots$$

in cui z è lo scarto dalla media vera diviso per la dispersione. $\varphi_0(z)$ è una distribuzione normale e $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$ .... sono le derivate, funzioni di cui esistono appropriate tavole [1]. A_3, A_4, ... sono coefficienti calcolabili dalla distribuzione empirica come si vedrà appresso. Saranno qui usati, come in genere è sufficiente in gran numero di applicazioni, i soli termini scritti. Ancora è da notare che la serie così definita non dà la distribuzione da adattare alla osservata, ma una simile; e per passare da questa alla osservata, basta tener conto in modo che apparirà ovvio del rapporto delle aree (cioè delle frequenze complessive).

Segue ora lo schema di calcolo pei coefficienti A_3 ed A_4; si tenga conto che i momenti m sono qui (diversamente dai μ) riferiti all'ascissa di riferimento (883.33 mm) della tab. 1ª; sono anche usate le notazioni dei cosidetti seminvarianti λ.

$s_0 = 60$	$s_1 = -3$	$s_2 = 1527$	$s_3 = 3615$	$s_4 = 185199$
$m_0 = 1$	$m_1 = -0.05$	$m_2 = 25.45$	$m_3 = 60.75$	$m_4 = 3086.65$

[1]) Qui sono state usate quelle date dal CHARLIER in appendice al suo compendio: *Vorlesungen über die Grundzüge der Matematischen Statistik*: Lund, C. W. K. Gleerups Förlag, 1931.

$$\lambda_1 = m_1 = -0.05$$
$$\lambda_2 = m_2 - m_1^2 = \sigma^2 = 25.45$$
$$(\sigma = \sqrt{\lambda_2} = 5.04, \text{ già visto})$$
$$\lambda_3 = m_3 - 3\,m_1 m_2 + 2\,m_1^3 = 64.57$$
$$\lambda_4 = m_4 - 4\,m_1 m_3 - 3\,m_2^2 + 12\,m_1^2 m_2 + 6\,m_1^4 = 1156.46$$
$$A_3 = -\frac{\lambda_3}{3!\,\sigma^3} = -0.084$$
$$A_4 - \frac{\lambda_4}{4!\,\sigma_4} = +0.074.$$

La costruzione della curva di graduazione, determinati i parametri, è mostrata in dettaglio alla tab. 2ª (pag. seguente). In essa, la colonna (1) dà gli scarti x come la tab. 1ª; la (2) dà $z = \frac{x - \lambda_1}{\sigma}$; le (3), (4), (5) dànno i 3 termini della serie ottenuti dalle tavole del CHARLIER e dai valori calcolati di A_3 ed A_4; la (6) dà le somme y delle 3 colonne precedenti, la (7) dà le frequenze calcolate F. c., o prodotti della (6) pel fattore costante 12.02 per ridurre la frequenza complessiva della distribuzione (somma della stessa colonna (7)) a 60; la colonna (8) dà per confronto le frequenze osservate; la (9) dà i prodotti P della (6) pel fattore costante 0 20, in modo che la somma complessiva della colonna (9) sia 1.00, cosicchè la colonna stessa dà le probabilità per un anno qualsiasi di avere pioggia annua compresa in un intervallo generico dei dati (di 33 mm).

Non è il caso di fare un confronto numerico particolareggiato tra la rappresentazione normale e lo sviluppo in serie del CHARLIER; è chiaro che i due termini additivi in φ_3 e φ_4 devono dare qualche vantaggio allo sviluppo in serie. Basterà una breve verifica, fatta per intervalli di 100 mm (anzichè 33) di pioggia annua. Per non accrescere lo svantaggio della rappresentazione normale, usiamo un raggruppamento che la segua visibilmente meglio (come vedesi dalla Fig. 1, il raggruppare insieme i 3 intervalli da 900 a 1000 mm, darebbe subito una accentuata asimmetria); il raggruppamento scelto è quello della 1ª colonna della tab. 3ª La 2ª colonna dà le frequenze osservate F. o.; la 3ª le calcolate con la rappresentazione normale, F. c. n.; la 5ª le calcolate con la serie, F. c. ch.; la 4ª e 6ª le differenze F. c. — F. o. Si vede anche dalle semplici somme dei valori assoluti Δ, come dalla Fig. 2, la maggiore convenienza della serie; in realtà, se col particolare raggruppamento degli intervalli, si è migliorata la simmetria della distribuzione, è rimasta tuttavia accentuata la forma appuntita (leptocurtica), che la rappresentazione normale non può seguire abbastanza.

La tab. 4ª dà ancora, per gli intervalli indicati le rispettive probabilità *a posteriori* di pioggia annua P, ottenute per somme dalla colonna (9) della tab. 2ª. Si noti che i calcoli delle tabelle sono stati eseguiti con una cifra in più delle riportate, quindi nei risultati potrà apparire qualche scarto di una unità dell'ultima cifra nel verificare i calcoli servendosi delle tabelle stesse.

Tab. 2ª — Calcolo delle frequenze dalla serie di CHARLIER *e delle probabilità corrispondenti ai successivi intervalli.*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
x	z	$\varphi_0(z)$	$A_3\varphi_3(z)$	$A_4\varphi_4(z)$	y	F. c.	F. o.	P
— 14	— 2.765	0.009	— 0.009	+ 0.010	0 009	0.1	1	0.00
— 13	567	015	011	008	011	0.1	—	0.00
— 12	369	024	012	+ .001	013	0.2	—	0.00
— 11	171	038	012	— .009	017	0.2	—	0.00
— 10	1.972	057	008	022	026	0.3	—	0 01
— 9	774	083	— .002	037	044	0.5	1	0.01
— 8	576	115	+ .008	049	074	0.9	2	0.01
— 7	378	154	020	055	119	1.4	1	0.02
— 6	180	199	032	050	180	2.2	1	0.04
— 5	0.981	246	041	034	254	3.0	5	0.05
— 4	783	294	046	— .007	333	4.0	1	0.07
— 3	585	336	044	+ .027	407	4.9	3	0.08
— 2	387	370	034	058	463	5.6	7	0.09
— 1	— 0.188	392	+ .018	081	491	5.9	4	0.10
0	+ 0.010	399	— .001	089	487	5.8	6	0.10
+ 1	208	390	020	080	450	5.4	11	0.09
+ 2	406	367	035	056	387	4.7	5	0,08
+ 3	605	332	044	+ .023	311	3.7	4	0.06
+ 4	803	289	046	— .010	234	2.8	1	0.05
+ 5	1.001	242	040	036	165	2.0	—	0.03
+ 6	199	194	030	052	112	1.3	2	0.02
+ 7	397	150	018	055	077	0.9	1	0.02
+ 8	596	112	— .007	048	057	0 7	1	0.01
+ 9	794	080	+ .003	035	047	0 6	—	0.01
+ 10	992	055	009	021	043	0.5	—	0.01
+ 11	2.190	036	012	— .008	041	0.5	—	0.01
+ 12	389	023	013	+ .002	038	0.4	1	0.01
+ 13	587	014	011	008	033	0.4	1	0.01
+ 14	785	008	009	010	028	0.3	—	0.01
+ 15	983	005	007	010	022	0.3	—	0.00
+ 16	+ 3.182	0.003	+ 0.005	+ 0.008	0,016	0.2	1	0.00

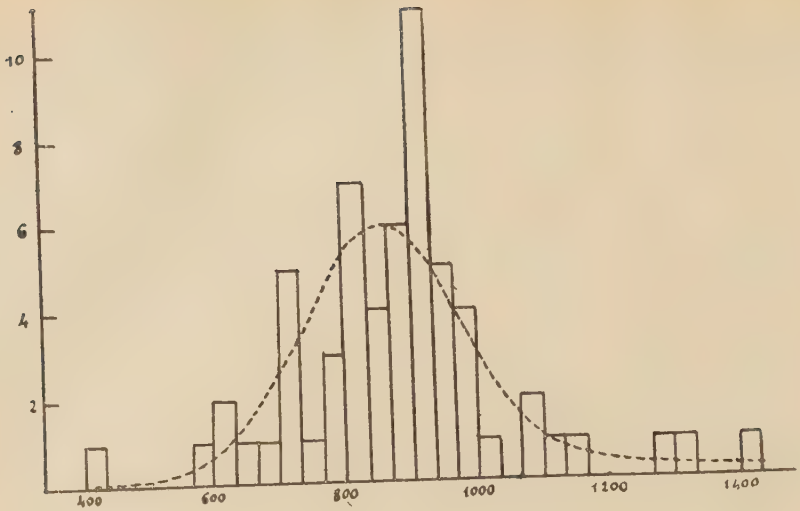



Fig. 1. — Distribuzione osservata e adattamento di una curva tipo A di CHARLIER, come dalla tabella 2ª.

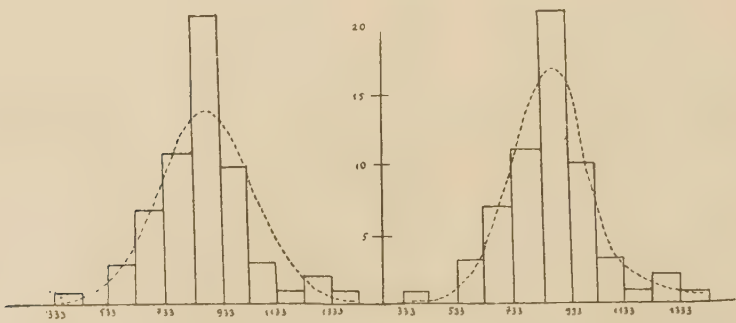



Fig. 2. — Confronto dell' adattamento di una distribuzione normale e di una curva tipo A di CHARLIER, come dalla tabella 3ª

Tab. 3ª — Confronto delle rappresentazioni usate con le frequenze osservate.

i. a. mm.	F. o.	F. c. n.	Δ	F. c. ch.	Δ
333	1	—	— 1	—	— 1
433	—	1	+ 1	—	
533	3	3		2	— 1
633	7	7		7	
733	11	12	+ 1	14	+ 3
833	21	14	— 7	17	— 4
933	10	12	+ 2	11	+ 1
1033	3	7	+ 4	4	+ 1
1133	1	3	+ 2	2	+ 1
1233	2	1	— 1	1	— 1
1333	1	—	— 1	1	
1433					

Tab. 4ª — Probabilità di pioggia annua per intervalli di 100 mm.

i. a. mm.	P
400	0.007
500	0.02
600	0.07
700	0.20
800	0.29
900	0.23
1000	0.10
1100	0.04
1200	0.03
1300	0.02
1400	0.003
1500	

Reagibilità allo stato solido fra silico-alluminati alcalini e ossidi alcalino-terrosi

Nota I: *Miscele: leucite-calce*

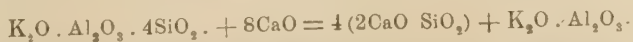
del prof. **Vittorio Cirilli,** *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 5 giugno 1945)

Sunto. — I risultati ottenuti dall'Autore studiando l'andamento della reazione allo stato solido fra calce e leucite, possono riassumersi come segue:

1º) È provato che per reazione allo stato solido fra 1050º e 1100º, la leucite fissa calce all'incirca nel rapporto in peso 1 : 1. Se il riscaldamento lo si prolunga notevolmente (24 ÷ 36 ore) oppure se si innalza la temperatura fin sotto i 1300º, il limite della calce che può essere trattenuta dalla leucite sale verso il 60 %.

2º) È probabile che la reazione decorra secondo lo schema:

$$K_2O . Al_2O_3 . 4SiO_2 . + 8CaO = 4 (2CaO\ SiO_2) + K_2O . Al_2O_3 .$$

Esaminando per via ottica e röntgenografica i prodotti di cottura, privi di calce libera, si può però confermare con sicurezza solo la presenza di $2CaO . SiO_2$.

3°) È provato che il silicato bicalcico e l'alluminato potassico, cimentati nelle condizioni adottate per le prove sulle miscele calce-leucite, reagiscono tra di loro. Anche la calce attacca l'alluminato con conseguente formazione di alluminati di calcio: $5CaO \cdot 3Al_2O_3$. e $3CaO \cdot Al_2O_3$, e spostamento della potassa.

È probabile che accanto alla reazione precedentemente indicata decorrano queste ultime reazioni e tanto più intensamente quanto più elevata è la temperatura. Resterebbe in tal modo chiarito lo spostamento dal 50 % al 60 % del limite della calce trattenuta dalla leucite, spostamento che si è osservato con l'aumento della durata e della temperatura del trattamento.

4°) Aggiunte di: CaF_2, $CaCl_2$, Fe_2O_3 favoriscono la reazione permettendo la mobilizzazione della potassa a temperatura più bassa di quella occorrente qualora si lavori con la semplice miscela calce-leucite.

Altre ricerche sono tuttora in corso, dirette alla ulteriore chiarificazione dello interessante argomento.

G. TAMMANN e G. F. GREVEMEYER [1], hanno pubblicato, una ventina di anni or sono, i risultati di un loro studio diretto ad esaminare le possibilità di reazione allo stato solido fra alcuni silico-alluminati alcalini: leucite, nefelina, ortoclasio, orneblenda, e gli ossidi di bario, calcio, magnesio.

Nel caso delle miscele con calce, le curve di riscaldamento mostrarono a quegli studiosi solo un lievissimo aumento nella velocità di salita della temperatura, tra i 700° e i 1000°. Fu osservato cioè un debole effetto esotermico che essi attribuirono ad un inizio di reazione ben presto però arrestata o fortemente ritardata dalla formazione di pellicole protettive di prodotti di neo-formazione che impedirebbero il progredire della reazione, iniziatasi in superficie, verso il cuore dei singoli granelli.

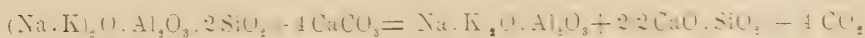
Dei tentativi sporadici, coronati talvolta da successo per quanto riguarda l'aspetto tecnico, ma che non ebbero possibilità di realizzazione sul piano economico, furono fatti in passato avendo prevalentemente di mira l'estrazione dell'alcali per trattamento dei silico-alluminati alcalini con calce, a moderata ed a alta temperatura, con o senza l'ausilio del vapore e della pressione, ma il problema è stato poi più largamente impostato e avviato verso soluzioni di notevole interesse, solo in quest'ultimo decennio, a seguito dell'accentuarsi della richiesta di allumina da parte del mercato.

La letteratura dei brevetti si è così arricchita di numerose indicazioni e precisazioni circa il cosidetto « trattamento basico »: specie della leucite e della nefelina, ai fini dell'ottenimento di allumina, alcali ed eventualmente cemento, ai fini cioè di utilizzare integralmente i costituenti dei materiali su ricordati.

---

[1]) G. TAMMANN e G. F. GREVEMEYER, *Über die Einwirkung von* MgO, CaO *und* BaO *auf Silikate beim Erhitzen, und die Herstellung von metallischen Eisen aus Silikaten.* Zeit. an. allg. Chem , **136**; 114; (1924).

Di particolare rilievo, in questo settore della ricerca, appare lo studio di F. N. STROKOW e collaboratori, che ha guidato la messa a punto dei processi di utilizzazione della nefelina (ottenimento di alcali, allumina, cemento) ricavata come sottoprodotto del frazionamento per flottazione delle rocce apatitiche della penisola di Kola. Purtroppo di questi lavori russi non disponiamo che dei riassunti pubblicati nel Zentr. Blatt. [1]. Vi è fatto menzione, tra l'altro, che l'attacco per opera della calce a temperatura elevata avviene con alti rendimenti secondo lo schema:

$$(Na.K)_2O.Al_2O_3.2SiO_2 + 4CaCO_3 = Na.K_2O.Al_2O_3 + 2\,2CaO.SiO_2 + 4\,CO_2$$

Per l'Italia, dove da tempo è sul tappeto il problema della più conveniente utilizzazione dell'allumina, dell'alcali e della silice contenuti nella leucite, ricordiamo che qualche anno fa, a Bagnoli di Napoli, era stato installato, ed aveva già approdato a risultati soddisfacenti, un impianto pilota per il trattamento basico del minerale.

Le ricerche di cui si dà conto sono state impostate al fine di chiarire l'andamento delle trasformazioni che avvengono durante il trattamento termico di miscele di silico-alluminati alcalini con ossidi alcalino-terrosi, e qui di seguito descriviamo succintamente quello che abbiamo avuto modo di osservare esaminando il comportamento delle miscele: leucite calce [2].

Preliminarmente abbiamo cercato di stabilire quale è il massimo quantitativo di calce che è suscettibile di combinarsi con la leucite entro un intervallo di temperature compreso tra 1000° e 1300°, dato che, al disotto dei 1000°, la reazione allo stato solido è lentissima ed è pertanto malagevole di procedere con sufficiente sicurezza ai rilievi sperimentali, mentre al disopra dei 1300° il fenomeno della volatilizzazione dell'alcali è così cospicuo che rapidamente il sistema risulta alterato nel rapporto fra i suoi costituenti.

Le miscele calce leucite o calcare-leucite, in vario rapporto, preparate per molitura contemporanea dei materiali previamente polverizzati e passati al vaglio di 4900 maglie cm², sono state scaldate per tempi diversi e a differenti temperature in recipiente di platino, chiuso.

I trattamenti termici li abbiamo ripetuti più volte sullo stesso prodotto

---

[1]) F. N. STROKOW, I. L. TALMUD e W. A. MUSSJAKOW. *Über die Gewinnung von Aluminiumoxyd, Kaustischen Alkali und Zement aus Nephelin.* Zentr. Blatt., 1936 II: 4034 — F. N. STROKOW. *Gewinnung von Aluminiumoxyd und Alkalien aus Nephelin nach der alkalischen Methode* Zentr. Blatt., 1937 II; 3055.

[2]) La leucite adoperata per la sperimentazione è stata ricavata per cernita a mano di concentrati ricchi forniti dalla Società Italiana Potassa. La composizione del materiale è la seguente: Perdita a. f. 0.81 %: SiO_2 %: 52.40 : Al_2O_3 %: 23.36; Fe_2O_3 %: 0.82 : CaO %: 2.67 : alcali %: come K_2O 19.05. Tale composizione è prossima a quella teorica: SiO_2 %: 55.05 : Al_2O_3 %: 23.36 : K_2O %: 21.59.

finemente macinato dopo cottura, in modo da rompere le pellicole degli eventuali prodotti di neo-formazione che avvolgerebbero e proteggerebbero i granelli dei solidi.

Come criterio diagnostico per stabilire se l'ossido di calcio della miscela è stato totalmente fissato dalla leucite, abbiamo adoperato sia il metodo röntgenografico sia quello microscopico (saggio White).

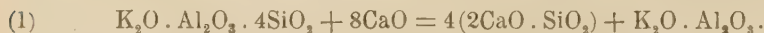
Con il primo di essi il quantitativo di CaO libero che può essere svelato con sicurezza è dell'ordine del 3 % ÷ 4 %, mentre con il secondo la sensibilità è maggiore: si possono apprezzare dei quantitativi di CaO inferiori a 1 %.

Le migliori condizioni di esperienza (reazione abbastanza veloce, volatilizzazione dell'alcali non eccessiva) le abbiamo potute fissare tra 1050° e 1100°. Per tali temperature il rapporto, in peso, tra calce combinata e leucite posta a reagire è di 1 : 1 (50 % CaO).

La combinazione completa richiede circa 6 ore di riscaldamento. Tuttavia per più lunghe durate di riscaldamento (21 ÷ 36 ore) alle temperature indicate, oppure, per durate più brevi, a più alta temperatura, si è osservato che il quantitativo della calce combinata con la leucite aumenta leggermente. Contemporaneamente, se si lavora con recipiente aperto, si nota che il materiale perde il peso, ciò che indicherebbe come la calce si venga fissando a spese dell'alcali che volatilizza.

Comunque prolungando la durata del riscaldamento, e non elevando la temperatura al disopra dei 1300°, la calce trattenuta dalla leucite non supera il 60 %.

Saremmo pertanto portati a dedurre che tra i 1000° e i 1300° la reazione tra leucite e calce avviene secondo lo schema :

$$(1) \qquad K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 4SiO_2 + 8CaO = 4(2CaO \cdot SiO_2) + K_2O \cdot Al_2O_3 .$$

In questo caso, infatti, il miscuglio finale contiene il 50,6 % di CaO.

Per verificare tale deduzione, il prodotto che ha fissato della calce in ragione del 50 %, e non contiene calce libera che in tracce, è stato sottoposto ad esame ottico e röntgenografico.

Sullo spettro di raggi X sono evidenti le sole righe del silicato bicalcico (nella forma: $\beta\, 2CaO \cdot SiO_2$). Non si individuano invece quelle dell'alluminato che pure dovrebbe costituire il 22,2 % del materiale, alluminato il cui spettro compare chiaramente quando si esamina il miscuglio: silicato-alluminato nello stesso rapporto nel quale i due composti dovrebbero essere presenti nel materiale studiato [1]).

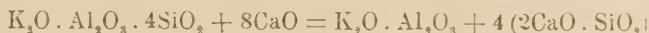
[1]) Se invece della leucite si pone a reagire con la calce, in condizioni similari, il silico-alluminato potassico di composizione: $K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$, ottenuto artificialmente per sinterizzazione a temperatura elevata, nel prodotto della reazione lo alluminato potassico è chiaramente visibile accanto al silicato bicalcico.

Al microscopio, il prodotto della reazione appare uniformemente costituito da granelli birifrangenti con indice di rifrazione che oscilla da 1,68 a 1,70, constatazione questa che non esclude però lo schema indicato in precedenza perchè i granelli, che costituiscono la massa uniforme del campo, possono risultare costituiti da un miscuglio di β 2CaOSiO$_2$ ($\alpha = 1{,}717$; $\gamma = 1{,}735$) e di $K_2O \cdot Al_2O_3$ ($n_D = 1{,}603$).

Abbiamo notato altresì, nel corso delle indagini ottiche, che per prolungato riscaldamento del materiale in esame, a 600° ÷ 630°, esso non modifica nè l'aspetto nè l'indice di rifrazione. Anche lo spettro non subisce modificazioni di sorta.

Piccole quantità di sostanze estranee comunque intimamente associate a β 2CaO . SiO$_2$, renderebbero quindi impossibile, anche per trattamento termico a 600° ÷ 630°, la sua trasformazione in γ 2CaO . SiO$_2$, che è la forma stabile a temperatura ordinaria ($\beta \rightleftarrows \gamma$ a 675°).

Dato lo scarso valore probativo delle indagini sopra descritte, i risultati delle quali non consentono di confermare lo schema di reazione:

$$K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 4SiO_2 + 8CaO = K_2O \cdot Al_2O_3 + 4\,(2CaO \cdot SiO_2)$$

perchè non è stato possibile di provare l'esistenza dell'alluminato potassico, abbiamo voluto indagare se a temperatura elevata tale alluminato può coesistere insieme col silicato.

Per maggiore evidenza sono stati presi in esame dei miscugli:

$$K_2O \cdot Al_2O_3 - 2CaO \cdot SiO_2 \text{ invece di: } K_2O \cdot Al_2O_3 - 4(2CaO \cdot SiO_2).$$

Effettivamente, si è osservato che mentre nello spettro del miscuglio non trattato termicamente sono chiaramente visibili le righe dell'alluminato, dopo riscaldamento di 6 ore a 1050° — 1100° si nota una nettissima diminuzione dell'intensità di dette righe. Parallelamente, al microscopio, accanto a cristalli inalterati di silicato e di alluminato, compariscono cristalli diversi con indice di rifrazione: 1,67 ÷ 1,68.

Non siamo riusciti a definire la natura della nuova fase. Da questa constatazione resta assodato nondimeno che la reazione tra calce e leucite, tra 1050° e 1100°, non decorre così semplicemente come è previsto dallo schema sopra indicato; cioè che almeno il sistema finale non è costituito unicamente di alluminato potassico e di silicato bicalcico.

Anche gli studiosi che recentemente si sono occupati di definire il comportamento dell'alcali nella clinkerizzazione del cemento portland, escludono la possibilità di coesistenza dell'alluminato potassico con i silicati bicalcico e tricalcico. L'alcali si legherebbe alla calce ed alla silice formando composti ternari [1]).

---

[1]) H. Jnsley e H. F. Mc Murdie. *Minor constituents in Portland cement clinker.* Bur. Stand. Journ. Res. **20**; 173; (1938). — W. C. Taylor, Bur Stand. Journ.

Si noti tuttavia che tali ricerche vertono su sistemi in equilibrio, mentre non altrettanto può dirsi per il complesso sistema di cui andiamo studiando l'evoluzione.

L'interpretazione dell'assieme delle trasformazioni è reso ancor più complicato dalla possibilità di reazione, allo stato solido, fra l'alluminato potassico e la calce. Che tale reazione sia possibile, che cioè l'alluminato alcalino sia instabile in presenza di ossido di calcio, lo abbiamo potuto dimostrare riscaldando a 1050° — 1100° dei miscugli equimolecolari di $K_2O \cdot Al_2O_3$ e CaO.

Seguendo la reazione con l'esame röntgenografico abbiamo osservato, anche dopo riscaldamento di breve durata (3 ore), la comparsa dell'alluminato: $5\ CaO \cdot 3\ Al_2O_3$.

Se la miscela calce-leucite contiene quindi ossido di calcio in eccesso rispetto a quanto è richiesto dal rapporto in peso 1 : 1, oppure se la reazione è ostacolata dalla formazione di pellicole passivanti che, inglobando i granelli di leucite, ne impediscono l'attacco a cuore — da cui l'importanza della intimità della mescolanza e l'interesse che presenta l'impiego di attivatori, ricordato in alcuni brevetti recenti — ha luogo una più o meno profonda decomposizione dell'alluminato potassico a seguito della comparsa del trialluminato pentacalcico.

La potassa che si pone in libertà è, probabilmente, trattenuta dalla silice e dalla calce sotto forma di combinazione ternaria. Diciamo probabilmente perchè nella letteratura non è fatta menzione di composti quaternari: $CaO - SiO_2 - Al_2O_3 - K_2O$ nè, d'altro canto, compariscono composti ternari nel sistema: $CaO - K_2O - Al_2O_3$ [1]), mentre numerosi sono i solidi di composizione ternaria individuati nel sistema [2]): $CaO - K_2O - SiO_2$.

Se si riscaldano alla temperatura di esperienza miscugli contenenti: SiO_2, $CaCO_3$, K_2CO_3 di composizione oscillante entro i limiti: $2CaO\text{-}SiO_2\text{-}K_2O$ e $CaO\ SiO_2\ 2K_2O$ si nota che accanto al silicato bicalcico si forma con facilità il composto ternario: $K_2O \cdot CaO \cdot SiO_2$.

Solo prolungando a lungo il riscaldamento, il sistema si evolve verso

---

Res **27**; 311; (1941); Zentr. Blatt. *Das System* $2CaO\ SiO_2 - K_2O \cdot CaO \cdot SiO_2$ *und andere Untersuchungen über Phasengleichgewichte an Kalihaltigen Systemen.* 1942 II, pag. 635. — F. M. Lea e C. H. Desch. *The Chemistry of cement and concrete.* Londra, 1935.

[1]) L. T. Brownmiller e L. T. Work, *A phase rule study of the system: Lime-Potash-Alumina*-Concrete **43**; n. 9 pag. 35; (1935). Nel sistema: $CaO - Na_2O - Al_2O_3$ sono stati invece individuati i composti $8\ CaO \cdot Na_2O \cdot 3\ Al_2O_3$ e $3\ CaO \cdot 2\ Na_2O \cdot 5\ Al_2O_3$. — L. T. Brownmiller e R. H. Bogue, Amer. Journ. Sci. **23**; 501; (1923).

[2]) G. W. Morey, F. C. Kracek e N. L. Bowen, Journ. Glass. Technol. **14**; 149; (1930). — W. Eitel, *Physikalische Chemie der Silikate.* Lipsia, II Ediz., 1941. — G. W. Mory, The properties of Glass. New-York (1938).

la formazione dei composti stabili indicati, per la composizione dei miscugli in esame, dal diagramma di stato del sistema ternario: K_2O-CaO-SiO_2.

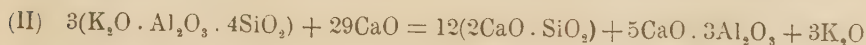
Nel caso si considerino miscugli contenenti anche allumina il numero dei composti possibili aumenta notevolmente e diviene praticamente difficilissimo individuare il composto ternario indicato, per via röntgenografica.

L'osservazione microscopica è parimenti poco probativa, possedendo sia l'alluminato potassico, sia l'alluminato pentacalcico un indice di rifrazione molto prossimo a quello del composto: $K_2O \cdot CaO \cdot SiO_2$ ($\omega = 1{,}600$; $\varepsilon = 1{,}605$).

Quest'ultimo è debolmente birifrangente ma, trattandosi di prodotti ottenuti per reazione allo stato solido e quindi imperfettamente cristallizzati una differenziazione per tale via dall'alluminato potassico e dall'alluminato pentacalcico otticamente isotropi, è anch'essa praticamente assai difficile.

Resta pur tuttavia probabile che tale composto ternario si trovi presente tra i prodotti della reazione con ossido di calcio dei miscugli contenenti: K_2O-Al_2O_3-SiO_2 e quindi della stessa leucite.

Ora, nell'ipotesi che l'allumina del sistema iniziale sia, nel sistema finale, totalmente impegnata nel composto: $5\,CaO \cdot 3\,Al_2O_3$, dallo schema:

$$\text{(II)}\quad 3(K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 4SiO_2) + 29CaO = 12(2CaO \cdot SiO_2) + 5CaO \cdot 3Al_2O_3 + 3K_2O$$

si deduce che il prodotto della reazione dovrebbe contenere ossido di calcio in ragione del 55,4 %.

Considerando che questa reazione può avvenire contemporaneamente alla I e che è possibile che il composto ternario abbia un contenuto di CaO inferiore a quello del silicato bicalcico [1]), possiamo dedurre che anche questo secondo schema di reazione non è in contrasto con il limite del 50 % di CaO determinato con l'esperienza. Da notare inoltre che la leucite da noi usata corrisponde solo approssimativamente alla formula teorica.

La stessa osservazione microscopica non è in disaccordo con quanto sopra; infatti $5\,CaO \cdot 3\,Al_2O_3$ ha un indice di rifrazione ($n_D = 1{,}608$) molto prossimo a quello dell'alluminato potassico.

Abbiamo voluto inoltre esaminare il comportamento di miscele calce-leucite più povere di calce del miscuglio 1 : 1 e, più precisamente, abbiamo voluto sottoporre al trattamento termico a 1050° — 1100° della leucite addizionata di un quantitativo di ossido di calcio sufficiente soltanto a fornire silicato monocalcico (CaO nel sistema iniziale = 34 %).

Gli spettrogrammi dei prodotti della cottura mostrano, anche per questo gruppo di miscugli, le righe di $\beta\ 2\,CaO \cdot SiO_2$. Al microscopio si può agevolmente stabilire che è presente leucite inalterata ($n_D = 1{,}508 - 1{,}509$) insieme con del materiale diverso, a indice di rifrazione variabile entro

---

[1]) I composti ternari: K_2O, SiO_2, CaO conosciuti, sono meno ricchi di calce di $2\,CaO \cdot SiO_2$.

limiti piuttosto ampi e compreso fra quello della leucite e quello del silicato bicalcico.

Si tratta probabilmente di leucite solo parzialmente attaccata, a meno di non volere attribuire i valori più bassi dell'indice di rifrazione — rispetto a quello del silicato bicalcico — alla presenza di silicati meno basici e quindi con indice di rifrazione inferiore (β 2 CaO . SiO_2 : $\alpha = 1{,}717$; $\gamma = 1{,}735$; 3 CaO 2 SiO_2 : $\alpha = 1{,}641$, $\gamma = 1{,}659$; wollastonite: $\alpha = 1{,}616$; $\beta = 1{,}629$; $\gamma = 1{,}631$). Data però l'evidenza del risultato dell'esame röntgenografico, ci sembra lecito di scartare quest'ultima ipotesi e di ritenere pertanto che, anche per i miscugli più poveri di calce, l'inizio della trasformazione termica è analogo a quello illustrato per le miscele calce-leucite a rapporto 1 : 1.

Abbiamo detto inizio della trasformazione perchè, continuando il riscaldamento per lungo tempo, il silicato bicalcico formatosi da principio, reagisce ulteriormente con la leucite e le sue righe scompaiono dallo spettro dei prodotti di cottura.

I miscugli calce-leucite perdono alcali se scaldati a temperatura elevata, la perdita per volatilizzazione crescendo, come è ovvio, con la temperatura e con la durata del trattamento termico.

Noi abbiamo voluto esaminare l'entità di questo fenomeno ponendoci in condizioni simili a quelle descritte per la sperimentazione espletata. Saggiando pertanto il comportamento della miscela a rapporto 1 : 1, per la medesima durata di trattamento termico: 6 ore, a temperature crescenti, si sono registrate le perdite di peso indicate dalla tabella 1.

TABELLA 1.

	% K_2O perduto, rispetto al totale			
	900°	1050°	1200°	1350°
Leucite	—	—	1,0	2,5
Alluminato potassico . . .	—	2,3	7,2	21,1
Leucite-calce (50 % CaO) . .	0,7	8,1	25,0	60,0
Leucite-calce (60 % CaO) . .	0,9	13,3	39,3	75,2
K_2O . Al_2O_3 + CaO	1,0	16,0	48,8	81,9

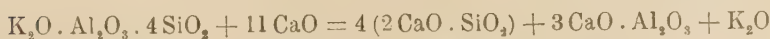
Il riscaldamento è stato eseguito nello stesso crogiolo di platino, scoperto, e, per rendere il più possibile omogeneo il confronto dei risultati, si è adoperato per ogni prova lo stesso peso della medesima miscela iniziale.

La leucite da sola, saggiata in queste condizioni, perde un quantitativo di alcali di gran lunga inferiore, mentre le miscele con CaO accusano delle perdite gradualmente crescenti con l'aumentare del contenuto di calce.

La miscela con 60 % di CaO, sempre dopo 6 ore di riscaldamento, perde a 1350° il 75,2 % del totale di K_2O. Da questo punto, ulteriori aumenti nella percentuale della calce nel sistema iniziale non producono più dei notevoli incrementi dell' intensità della volatilizzazione.

Nel miscuglio che inizialmente conteneva il 60 % di CaO e che ha mostrato una perdita di alcali del 75,2 % abbiamo osservato la presenza di alluminato tricalcico.

Per la reazione:

$$K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot 4\,SiO_2 + 11\,CaO = 4\,(2\,CaO \cdot SiO_2) + 3\,CaO \cdot Al_2O_3 + K_2O$$

si richiede ossido di calcio in ragione del 58,5 %, e ciò spiega perchè il quantitativo massimo di CaO che può fissare la leucite per riscaldamento prolungato a temperature inferiori a 1300°, si avvicina al 60 %.

È ben noto che la formazione dell' alluminato più basico è favorita dall' aumento della temperatura. Ad esempio, nella reazione allo stato solido tra calce ed argilla nei rapporti richiesti dalla composizione del portland, si ritiene che $2\,CaO \cdot SiO_2$ e $5\,CaO \cdot 3\,Al_2O_3$ prendano origine fra 900° e 1200°, mentre $3\,CaO \cdot Al_2O_3$ compare solo tra i 1200° e i 1300°. La formazione del silicato tricalcico comincia invece a divenire notevole al disopra di tale temperatura [1]).

Nel caso del miscuglio 1 : 1, riscaldato a 1200°, abbiamo osservato che la scomparsa della potassa è inizialmente seguita dalla comparsa di gehlenite ($2\,CaO \cdot Al_2O_3 \cdot SiO_2$). Scaldando a temperatura più alta, la gehlenite scompare però gradualmente, tendendo il sistema, con la progressiva perdita di potassa, a raggiungere l' equilibrio previsto dal diagramma di stato ($Al_2O_3 - CaO - SiO_2$).

Da quanto precede si deve quindi dedurre che la calce favorisce in modo notevolissimo la volatilizzazione dell' alcali e ciò sembra dovuto, più che alla diluizione della leucite nella miscela, con il conseguente aumento della superficie evaporante, all' azione dell' ossido di calcio libero sull' alluminato potassico preformato, azione che porta allo spostamento della potassa ed alla formazione di alluminati di calcio.

Sullo stesso argomento citiamo due note di S. L. Madorsky [2]) nelle quali vien trattato della volatilizzazione della potassa dalle rocce leucitiche dello Wyoming (wyomingite — 10 % ÷ 12 % K_2O) e da altri silico-alluminati alcalini: feldspato, greensand.

Nel caso specifico della wyomingite, l' autore ha trovato che la roccia,

---

[1]) F. M. Lea e C. H. Desch, *The Chemistry of cement and concrete*. Londra, 1935.

[2]) S. L. Madorsky, *Volatilisation of Potash from wyomingite*. Ind. Eng. Chem. **23**; 78; (1931); — *Volatilisation of Potash from aluminium-silicates*. Ind. Eng. Chem. **24**; 233; (1932).

scaldata per 40′ a 1510°, perde poco più di un quarto della sua potassa; se però la si miscela rispettivamente con cloruro di sodio, o cloruro, fluoruro, carbonato di calcio, la volatilizzazione è più rapida e più intensa tanto che i miscugli wyomingite-carbonato di calcio nei ropporti 1 : 1 ÷ 1 : 2 e contenenti $CaCl_2$ in quantità equivalente al K_2O presente, perdono quasi totalmente l'alcali poco al disopra dei 1100°.

Il miscuglio con solo carbonato di calcio nel rapporto : 1 wyomingite — $2\,CaCO_3$, fornisce a 1510° e sempre per 40′ di riscaldamento, una perdita di K_2O di 42,79 %.

È evidente che la mobilizzazione della potassa è favorita in modo notevolissimo dalla presenza del cloruro e del fluoruro di calcio. Tale influenza favorevole esercitata da attivatori, quali ad esempio: fluoruro di calcio e ossido ferrico, è altresì segnalata in alcuni brevetti recenti che hanno per oggetto il trattamento basico (con calce) dei silico-alluminati alcalini, e particolarmente della leucite, allo scopo di ricavare contemporaneamente: alcali e allumina. In questi ultimi esempi non si tratta di eliminare la potassa per volatilizzazione, ma di favorire la sua solubilizzazione a seguito di trattamento termico a temperature che debbono essere scelte in modo da ridurre al minimo la volatilizzazione stessa.

Noi abbiamo esaminato il comportamento della miscela leucite-calce a rapporto 1 : 1, alla quale si sono addizionati in varie percentuali: fluoruro di calcio, cloruro di calcio, ossido ferrico, ed abbiamo trovato che l'aggiunta del fluoruro attiva effettivamente la reazione allo stato solido, tanto che la miscela calce-leucite 1 : 1, mentre riscaldata a lungo da sola, a 900°, non manifesta segni apprezzabili di trasformazione, addizionata del 10 % di fluorite, lascia osservare al microscopio (saggio White) la completa assenza di calce libera dopo trattamento di sole 6 ore alla medesima temperatura [1].

L'azione attivante del cloruro di calcio è sensibile, ma meno energica di quella esercitata dalle medesime percentuali di fluoruro. Che il sesquiossido di ferro acceleri la fissazione della calce lo si può notare solo verso i 1100°.

Accenniamo infine che la presenza delle aggiunte su ricordate amplifica il debole effetto esotermico già notato da Tammann e Grevemeyer sulle curve di riscaldamento delle miscele calce-leucite.

Il materiale di osservazione di cui disponiamo a tutt'oggi è troppo modesto per poter tentare una soddisfacente interpretazione di questo inte-

---

[1]) Si è notato che il materiale cotto non presenta sensibili indizi di agglomerazione. Ciò si osserva invece aumentando la percentuale di fluorite nella miscela oppure innalzando la temperatura di trattamento.

Il comportamento delle miscele: leucite-calce-fluorite, costituirà l'oggetto della nota successiva.

ressante argomento, interpretazione che mira a chiarire il meccanismo dell'azione attraverso la quale gli attivatori favoriscono in modo così evidente la reazione tra la calce e la leucite. Si può pensare che l'attivatore prenda parte direttamente, insieme con la calce, all'attacco chimico del materiale, oppure che, alle temperature di cottura, esso provochi formazione di liquido la cui presenza, favorendo il contatto tra le sostanze reagenti, favorisce la reazione.

Quest'ultima semplice ipotesi potrebbe applicarsi al caso del cloruro di calcio, che fonde a circa 780°, forse a quello del sesquiossido di ferro, perchè nel sistema $CaO - Fe_2O_3$ l'inizio della comparsa di liquido avviene intorno ai 1200°, e qui siamo in presenza degli altri costituenti: SiO_2, Al_2O_3 e specialmente K_2O. Per la fluorite si conosce solo che nel sistema: $CaO - CaF_2 - 2CaO\,SiO_2$ [1]) la più bassa temperatura alla quale è presente del liquido è quella dell'eutettico: $CaO - CaF_2 - 2\,CaO\,.\,SiO_2$ a 1230°.

Riassumendo quanto abbiamo esposto nel corso della nota, possiamo fissare i seguenti punti:

1. È provato che per reazione allo stato solido fra 1050° e 1100°, la leucite fissa calce all'incirca nel rapporto in peso 1 : 1. Se il riscaldamento lo si prolunga notevolmente (24 ÷ 36 ore), oppure se si innalza la temperatura fin sotto i 1300°, il limite della calce che può essere trattenuta dalla leucite sale verso il 60 %.

2. È probabile che la reazione decorra secondo lo schema:

$$K_2O\,.\,Al_2O_3\,.\,4\,SiO_2 + 8\,CaO = 4\,(2\,CaO\,SiO_2) + K_2O\,Al_2O_3\,.$$

Studiando per via ottica e röntgenografica i prodotti di cottura, privi di calce libera, si può però confermare con sicurezza solo la presenza di $\beta\,2\,CaO\,.\,SiO_2$.

3. È provato che il silicato bicalcico e l'alluminato potassico, cimentati nelle condizioni adottate per le prove sulle miscele calce-leucite, reagiscono tra di loro. Anche la calce attacca l'alluminato con conseguente formazione di alluminati di calcio: $5\,CaO\,.\,3\,Al_2O_3$ e $3\,CaO\,.\,Al_2O_3$, e spostamento della potassa.

È probabile che accanto alla reazione precedentemente indicata decorrano queste ultime reazioni e tanto più intensamente quanto più elevata è la temperatura. Resterebbe in tal modo chiarito lo spostamento dal 50 % al 60 % del limite della calce trattenuta dalla leucite, spostamento che si è osservato con l'aumento della durata e della temperatura del trattamento.

4. Aggiunte di: CaF_2, $CaCl_2$, Fe_2O_3 favoriscono la reazione permet-

---

[1]) W. Eitel, *Das System $CaO - CaF_2 - Ca_2\,SiO_4$*. Zeit. angew. Miner. **1**; 269; (1938).

tendo la mobilizzazione della potassa a temperatura più bassa di quella occorrente qualora si lavori con la semplice miscela calce-leucite.

L'assieme dei rilievi sperimentali e delle considerazioni che intorno ad essi sono state svolte, non può certo considerarsi definitivo ed è molto probabile che l'ulteriore sviluppo della sperimentazione porti a modificare in parte l'interpretazione del chimismo che presiede alla evoluzione di questi complessi sistemi per i quali è così difficile distinguere tra assetto stabile e assetto transitorio.

Pertanto, il presente lavoro vuole essere solo una semplice esposizione preliminare il cui aspetto di maggior rilievo consiste nell'aver mostrato che l'argomento al quale esso è dedicato, lungi dall'essere esaurito, può fornire ampio materiale per indagini future.

Napoli, Istituto di Chimica Industriale della R. Università.

Il caolino del territorio di Capalbio (Grosseto)

Nota della dott. **Olimpia Amati**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 5 giugno 1945)

Sunto. — Le indagini eseguite pongono in evidenza il tipo halloysitico del materiale.

Si dà conto qui di sèguito delle indagini espletate per rilevare le caratteristiche strutturali di materiali silico-alluminosi provenienti da una concessione della Soc. «Rimifer» nel territorio di Capalbio.

I campioni giunsero all'Istituto nella primavera del 1943 e, purtroppo, non ci è stato possibile in sèguito sia di raccogliere le notizie sulla giacitura dei depositi e sull'entità dei fenomeni di caolinizzazione in quel territorio, sia di procedere direttamente al campionamento sul posto. Il susseguirsi degli avvenimenti bellici ci ha impedito cioè di esaminare in modo completo questi materiali secondo lo schema da noi adottato per la caratterizzazione scientifico-tecnica delle terre silico-alluminose delle diverse regioni d'Italia.

Alla ripresa dell'attività abbiamo potuto tuttavia portare a termine le indagini sulla costituzione dei campioni pervenutici, e sui risultati ottenuti crediamo utile di riferire succintamente in quanto essi ci appariscono di un certo interesse.

Tre sono stati i materiali oggetto di indagine: 1) e 2) sono delle terre bianche di aspetto omogeneo, friabilissime; 3) ha colore di fondo giallognolo e presenta evidenti inclusioni, segnatamente: venature ferruginose.

Si disperdono facilmente con l'acqua, ma le torbide, la cui reazione è praticamente neutra, sono poco stabili.

L'analisi chimica ha fornito i seguenti valori:

		1	2	3
Perdita al fuoco	%	24,32	20,14	19,24
SiO_2	%	41,09	45,54	47,42
$Al_2O_3 + TiO_2$	%	34,27	33,11	30.79
Fe_2O_3	%	0.22	0,77	1.09
n. d,	%	0,10	0,44	1.46
Perdita a 120°	%	11.24	9,29	8,70
SO_3		tr.	tr.	tr.

e l'analisi razionale (metodo Berdel):

	1	2	3
quarzo	—	7,0	10.4
feldspato	—	0.9	2.1

La refrattarietà segue la purezza dei campioni:

	1	2	3
C. S.	34 ÷ 35	32 ÷ 33	28 ÷ 29

Tenendo ora conto del contenuto di quarzo determinato con l'analisi razionale, si deduce che ai costituenti siallitici di tutti e tre i campioni spetta un valore del rapporto: SiO_2/Al_2O_3 all'incirca uguale a 2, e che pertanto essi appartengono al gruppo: caolinite-halloysite.

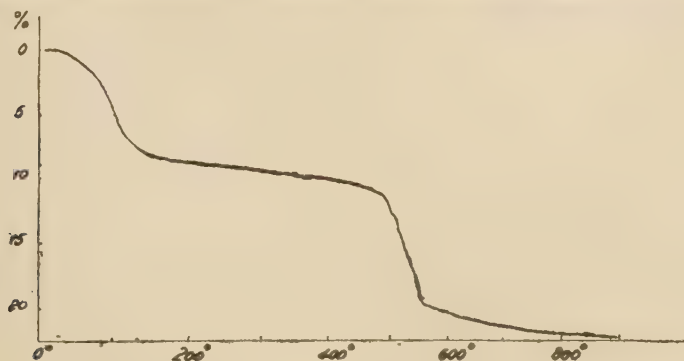



Fig. 1.

Le curve perdita di peso-temperatura mostrano soltanto che parte dell'acqua si elimina già al disotto dei 100° ed il rimanente a circa 450°. Come

esempio riporto, sulla fig. 1, la registrazione fotografica originale della curva termoponderale del campione 1): quelle degli altri due sono del tutto simili. Anche il risultato dell'analisi termica è in accordo con quanto sopra esposto.

Sembrerebbe quindi che il minerale siallitico sia per buona parte costituito da halloysite, la quale appunto verso i 50° perde due delle sue quattro molecole di acqua trasformandosi in metahalloysite, di struttura simile e di composizione identica a quella della caolinite.

Per affinare la diagnosi sono ricorsa alle indagini: microscopica e röntgenografica. Al microscopio, il campione 1) si mostra costituito, per la più gran parte, da sottili lamelle con indice di rifrazione uguale a 1,53 e con birifrangenza molto bassa. È presente tuttavia del materiale a birifrangenza più elevata, al quale spetta un indice di rifrazione prossimo a 1,56. Queste osservazioni indicano la natura halloysitica del campione in questione. Parte della halloysite originaria si è però già trasformata in caolinite passando, probabilmente, attraverso lo stadio intermedio di metahalloysite.

Lo spettrogramma di raggi X mi ha confermato infine che detto campione 1) è costituito da un miscuglio di halloysite e di caolinite.

Osservazioni similari sui campioni 2) e 3) conducono allo stesso risultato, tenuto conto della presenza del quarzo in essi contenuto.

Nel corso delle nostre ricerche sulla costituzione dei materiali silico-alluminosi nazionali abbiamo constatato che l'alunite è quasi costantemente associata alla halloysite. Questo non è il caso però per i materiali di Capalbio, che contengono solo tracce di SO_3. Una terra bianca, di costituzione simile a quella da me illustrata, è stata recentemente rinvenuta alla miniera cuprifera di Domusnovas in Sardegna, ed è stata descritta da Savioli e Scaini [1].

Napoli, Istituto di Chimica Industriale della R. Università.

---

[1]) *Contributo alla conoscenza degli idrosilicati di alluminio della Sardegna.* Atti Soc. Ital. Sc. Naturali. **82**; (1943).

La moderna concezione delle particelle elementari

Nota del socio **Antonio Carrelli**

(Adunanza del dì 4 dicembre 1945)

Sunto. — In questa Nota vengono sinteticamente esposte le considerazioni che portano alla descrizione mediante onde quantizzate delle proprietà che attualmente si attribuiscono alle particelle elementari, e si osserva che in tal modo si giunge in prima approssimazione alla spiegazione da un punto di vista unitario di tutta la fenomenologia finora nota; ma d'altra parte la descrizione suddetta, la quale è unitaria in un senso limitato, non dà per il suo stesso indirizzo alcuna spiegazione sulla natura delle particelle elementari, le quali sono tuttora da considerare come « dati empirici ».

1. Nell'attuale stadio dello sviluppo teorico della Fisica problema fondamentale è quello di giungere ad una formulazione delle leggi generali che permetta logicamente di dedurre che la Natura ha una struttura eminentemente discontinua, e più precisamente che l'assieme dei fenomeni è dipendente dalla presenza di elementi discontinui, di particelle elementari, le quali allo stato attuale delle nostre conoscenze sono dei seguenti tipi distinti: protoni, neutroni, mesoni (probabilmente positivi, negativi ed anche neutri) elettroni, positroni, fotoni ed i probabili neutrini.

La difficoltà sostanziale nella formulazione delle leggi elementari sta nel fatto che queste particelle non debbono considerarsi portando al limite estremo la grandezza delle ordinarie particelle macroscopiche, come corpuscoli di dimensioni piccolissime, ed attribuendo in tal modo ad esse un carattere esclusivamente corpuscolare, perchè in tal modo non si può costruire una teoria le cui deduzioni siano in accordo con i fatti sperimentali, bisogna invece attribuire a queste particelle che si considerano quali corpuscoli, anche proprietà antitetiche alle precedenti, e cioè proprietà ondulatorie. Volendo per esempio determinare in qual modo una determinata quantità d'energia elettromagnetica si distribuisce in un assieme d'individui, e cioè di quanti di luce si giunge a risultati in accordo con l'esperienza procedendo con un ragionamento statistico alla base del quale v'è l'ammissione di carattere assolutamente nuovo: che gl'individui abbiano la proprietà d'essere assolutamente indiscernibili gli uni dagli altri. Evidentemente questa ammissione non è conciliabile con il concetto abituale che si ha di un assieme di particelle, che, per quanto tutte assolutamente uguali fra di loro in partenza, possono sempre pensarsi discernibili attribuendo

od almeno pensando di attribuire per il calcolo che s'intende d'attuare, ad esse un numero discriminativo.

Il punto importante di questa ammissione d'indiscernibilità consiste nel fatto che può spiegarsi questo speciale modo di procedere nel calcolo ammettendo che sia connesso, con ogni particella, un elemento ondulatorio, e cioè in base ad un'analisi di LANDÈ [1]) si può giustificare la speciale statistica che bisogna per es. applicare ai quanti di luce, facendo in primo luogo la constatazione che a base di questa statistica, la quale deve necessariamente ammettersi per ottenere l'accordo in un problema fondamentale, quale la distribuzione dell'energia raggiante in un assieme di quanti di luce, sta l'ammissione che i quanti di luce non devono considerarsi quali elementi assolutamente indipendenti gli uni dagli altri; si può inoltre specificare un pò più compiutamente la interdipendenza di questi quanti analizzando i vari elemenii caratteristici della statistica; e precisamente può affermarsi che l'energia media che compete ad una celletta dello spazio di fase è da considerarsi uguale al prodotto del numero medio delle particelle per l'energia, ma l'energia di ogni celletta deve considerarsi data quale somma di elementi dotati anche di fase, e con fase distribuita a seconda della legge del caso, attribuendo quindi in ultima analisi al corpuscolo che si considera e cioè al quanto di luce una qualità essenzialmente ondulatoria.

Stabilito così su basi sicure la duplicità dell'aspetto delle manifestazioni delle particelle elementari, duplicità che ha poi piena verifica dalla esperienza, si deduce subito da questo risultato che tale duplicità degli enti fondamentali deve richiedere uno speciale formalismo matematico. In realtà la Fisica teorica moderna ha fatto ricorso a speciali teorie matematiche, quali la teoria dei gruppi, e l'algebra delle matrici appunto per tener conto di questo carattere discontinuo essenziale, ma d'altra parte si deve pur rimaner legati e necessariamente ad un carattere continuo, che sia capace di descrivere il lato ondulatorio del problema per poter tener anche conto di tutte quelle manifestazioni di carattere ondulatorio che sono come si è detto presenti nelle manifestazioni delle particelle elementari. Può dirsi quindi che problema essenziale della Fisica teorica è *la quantizzazione del continuo* [2]); si tratta cioè di giungere in modo per quanto è possibile rigoroso, ad una formulazione della discontinuità delle onde, dei processi ondulatori, e cioè alla discontinuità di quella Fisica che è già molto sviluppata prima dell'avvento della teoria quantistica, e che è denominata genericamente Fisica dei campi.

2. Questo processo di quantizzazione deve attuarsi relativamente ai vari tipi di particelle elementari, che hanno proprietà fisiche ben diverse. Il processo di ricerca delle equazioni fondamentali rispondenti ai requisiti

---

[1]) LANDÈ, Zeit. für Phys. Vol. 33, pag. 571 (1925).

[2]) HEISENBERG e PAULI, Zeit. für Phys. vol. 56, p. 1 (1929).

richiesti può schematizzarsi nel modo seguente: in primo luogo si procede con concetti eminentemente classici alla formulazione di un'equazione ondulatoria, e quindi ci si basa in questo primo momento sulla continuità, ma ottenuto l'equazione ondulatoria si attribuiscono alle onde da questa descritte speciali proprietà, s'impongono cioè *condizioni quantistiche*; si riconosce in altre parole che queste onde hanno proprietà diverse da quelle che si riscontrano nelle onde già ben note e sperimentalmente realizzate nella Fisica classica, siano cioè *quantizzate*, intendendo così dire che a queste onde sono state conferite proprietà tali che il sistema d'equazioni che le descrive, arricchito di questa speciale condizione, sia in grado di interpretare l'esistenza delle particelle di vario tipo, e tali inoltre da essere dotate di tutte le proprietà richieste dal loro comportamento.

Il postulato quantistico dunque si aggiunge quale necessario complemento di una descrizione ondulatoria basata sulla Fisica dei campi classici, e la legittimità di un tale procedimento è giustificata solo a « posteriori », in quanto che tale procedimenio si è dimostrato capace di spiegare i fatti sperimentali osservati.

La teoria della quantizzazione del campo, che dà modo di spiegare il comportamento di assiemi di particelle, e cioè la quantizzazione del continuo, si attua applicando lo stesso processo che è stato applicato nel caso della meccanica di una singola particella.

In queste prime indagini della Fisica quantistica si è visto che scritto il problema meccanico in forma hamiltoniana si attua il passaggio alla meccanica quantistica, che spiega in modo assolutamente soddisfacente il comportamento delle particelle elementari, mediante il seguente processo di quantizzazione: le equazioni dinamiche di HAMILTON che collegano le $\dot{p}_n$ e $\dot{q}_n$ con le derivate rispetto a q_n e p_n della $H\ (p_n, q_n)$ non individuano più relazioni tra quantità *classiche* $p_n, q_n, H(p_n, q_n)$ ben conosciute nella loro proprietà, ma tra *matrici*, che inoltre queste matrici p_n e q_n si considerano sottoposte a speciali condizioni dette appunto di *quantizzazione*, le quali com'è ben noto sono le seguenti:

$$[p_i, q_k] = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{ik} \qquad [p_i, p_k] = [q_i, q_k] = 0. \tag{I}$$

Queste condizioni di quantizzazione, come ha dimostrato il DIRAC [3]), sono equivalenti nella teoria classica a certe speciali espressioni, dette parentesi di POISSON; se queste parentesi soddisfano a condizioni analoghe alle (I) permettono di affermare che i due sistemi variabili p e q coniugate sono funzioni di due altri sistemi P e Q di variabili coniugate e che la trasformazione che fa passare dalle p, q alle P, Q è canonica, e cioè lascia

---

[3]) DIRAC. Proc. Roy. Soc. vol. 109, p. 642 (1925).

invariato il sistema d'equazione di HAMILTON. In altre parole le (I) della teoria classica affermano che se le (I) sono soddisfatte oltre alle p, q vi sono altre variabili canoniche. Vari problemi dinamici formulati secondo lo schema ora esposto sono stati risolti [4]) giungendo a risultati in accordo con l'esperienza, quale per es. il problema dell'oscillatore lineare; tale problema porta a stabilire che l'energia H non può assumere che valori discontinui, discreti, dati da una formula che coincide perfettamente con quella empirica Si può dunque concludere da questa esposizione che scritte le equazioni dinamiche relative ad una particella, considerando le variabili coniugate p_n e q_n quali matrici, e aggiungendo le condizioni di quantizzazione scritte (I) si ottiene pienamente la spiegazione del comportamento quantistico di una particella elementare.

Per ottenere la quantizzazione del continuo si può procedere secondo la ricerca fondamentale di PAULI e HEISENBERG [2]) nel modo seguente: si parte dall'equazione ondulatoria che si ritiene rappresenti in modo adeguato il problema che si considera, e con opportuni artifici analitici si trasforma questa equazione ondulatoria in modo che essa acquisti un aspetto analogo alle equazioni di HAMILTON; giunti a tal punto si procede analogamente alla quantizzazione seguendo il metodo precedente: considerando cioè le nuove p e q come matrici, e soggette inoltre alle condizioni di quantizzazione (I) naturalmente modificate in modo opportuno per poter considerare il caso del continuo.

Questo procedimento porta a risultati fondamentali poichè si spiega perfettamente l'esistenza di particelle tutte eguali ed indiscernibili con le proprietà di cui si è fatto precedentemente cenno; e queste proprietà possono compendiarsi dicendo che esse obbediscano alla statistica di BOSE [5]).

3. Questi risultati possono ottenersi in due modi distinti: si può trasformare l'equazione delle onde nel modo suesposto, facendo a questa assumere l'aspetto di equazione hamiltoniana, cioè l'aspetto che ricordi un problema fondamentalmente discontinuo, e procedendo poi alla quantizzazione, e questo metodo può attuarsi sia riferendosi ad un problema specifico, cioè ad un determinato tipo d'onda, sia trattando la questione da un punto di vista assolutamente generale. Oppure la quantizzazione può farsi mediante un passaggio al limite, e cioè procedendo dal discontinuo al continuo; l'uguaglianza dei risultati giustifica « a posteriori » l'applicabilità del primo metodo, che ha in se, per quanto si è fatto precedentemeate notare, una certa arbitrarietà, inoltre il secondo metodo può considerarsi vantaggioso sotto certi riguardi.

Per portare un esempio caratteristico del primo tipo [6]), nel quale però

---

[4]) BORN e JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*. Berlin, 1930.

[5]) HEISENBERG, *Die physikalischen Principien der Quantentheorie*, p. 106.

[6]) JORDAN, *Anschauliche Quantentheorie*, pag. 216.

si consideri una speciale equazione ondulatoria, si può partire seguendo il JORDAN dall' equazione unidimensionale della corda vibrante

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0 \qquad (V=1).$$

L' energia H connessa con questa corda vibrante, che si suppone di lunghezza 1, è data da

$$H=\frac{1}{2}\int_0^l \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\} dx.$$

Per ottenere un' espressione di H tale che in essa compaiano le variabili coniugate p_k e q_k deve decomporsi lo spostamento ψ della corda in serie di FOURIER, e cioè deve farsi la ricerca delle oscillazioni elementari della corda. Si ha allora com' è ben noto:

$$\psi=\sum_k q_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x \qquad \text{con} \qquad q_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\, dx.$$

Se si pone $p_k=\frac{l}{2}\dot{q}_k$ si può ottenere l' intento; infatti la H si trasforma nell' espressione seguente:

$$H=\sum_k \left\{\frac{p_k^2}{l}+\frac{k^2\pi^2}{4\,l^2}q_k^2\right\}.$$

In tal modo l' energia H viene espressa quale funzione quadratica delle p_k e delle q_k (che a loro volta sono espresse mediante la ψ). Il problema della corda vibrante viene in tal modo ad assumere l' aspetto di un problema meccanico in forma canonica in cui le p_k e q_k sono tante quante le componenti della serie in cui viene decomposta la ψ, cioè quante sono le oscillazioni fondamentali della corda. Il problema e dunque riportato allo schema precedente: si ritengono quindi le p e q matrici e soggette alle condizioni (I), da ciò deriva che queste onde sono quantizzate, e cioè che ognuno dei tipi di oscillazione della corda richiede una quantità determinata d' energia, e cioe che l' energia è quantizzata.

Il processo di quantizzazione del continuo può anche attuarsi in altro modo [7]), senza che ci si riferisca ad uno speciale tipo d' onda; basta cioè

[7]) HEISENBERG. Loc. cit., pag. 101.

presupporre l'esistenza di una teoria ondulatoria non ulteriormente specificata che sia deducibile da un principio variazionale. Si supponga cioè che si abbia una funzione di LAGRANGE L, dipendente da un certo numero di variabili $\psi_1, \psi_2, \ldots$ e dalle derivate prime $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2 \ldots$ delle ψ_i rispetto al tempo t, e dalle derivate prime rispetto alle x, y, z, le quali individuano un processo ondulatorio non ulteriormente specificato. Le ψ_i e $\dot{\psi}_i$ sono evidentemente funzioni delle coordinate x, y, z dei punti dello spazio.

Ponendo

$$\overline{L} = \int L\left(\psi_i\,,\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\,,\ \dot{\psi}_i\right) dv,$$

integrata $\overline{L}$ rispetto a t, e posto in analogia dei problemi meccanici

$$\delta \int L\left(\psi_i\,,\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}\,,\ \dot{\psi}_i\right) dx_1 \ldots dx_3\, dt = \delta \int \overline{L}\, dt = 0$$

si ottengono le euleriane

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} = 0$$

che individuano il processo ondulatorio.

Si tratta ora in questo caso molto generale, nel quale come chiaramente si vede si è svincolato in modo completo da qualsiasi specifica teoria ondulatoria, di trasformare queste equazioni, che individuano un certo processo, in modo che queste assumono una forma hamiltoniana, e questo risultato è stato raggiunto come già è stato detto da PAULI e HEISENBERG, in base ad uno speciale formalismo che così può riassumersi: definiamo in un certo modo la derivata di $\frac{\delta \overline{L}}{\delta \psi_i}$ e precisamente quale limite seguente:

$$\lim_{\Delta\psi \to 0} \frac{1}{\Delta \psi} \Bigg[L \left\{ \psi_\beta^{(p')} + \delta_{\alpha\beta}\delta(P-P')\Delta\psi ; \frac{\partial}{\partial x_i} [\psi_\beta^{(p')} + \delta_{\alpha\beta}\delta(P-P')\Delta\psi] ; \dot{\psi}_\beta^{(p')} \right\} - L \left\{ \psi_\beta^{(p')} ; \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_i} ; \dot{\psi}_\beta \right\} \Bigg].$$

Si ha da questa definizione che

$$\frac{\delta \overline{L}}{\delta \psi_i} = \frac{\partial L}{\partial \psi_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}}$$

e riconoscende che

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{\psi}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha},$$

le equazioni precedenti possono acquistare la forma lagrangiana seguente

$$\frac{\partial}{\partial \bar{L}} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_\alpha} - \frac{\delta L}{\delta \psi_\alpha} = 0.$$

Scegliendo ora le variabili Π_l definite come

$$\Pi_l = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_e}$$

quali variabili contugate delle ψ_e, e costruendo in modo canonico le H e $\bar{H}$, funzioni di Hamilton, con le ψ_l e Π_c

$$H = \sum_l \dot{\psi}_e \Pi_c - L \qquad \bar{H} = \int \Big(\sum_l \dot{\psi}_c \Pi - L \Big) dv = \int H dv$$

le equazioni precedenti possono assumere l'aspetto delle seguenti equazioni che sono del tipo di Hamilton

$$\dot{\psi}_\alpha = \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi_\alpha} \qquad \Pi_\alpha - \frac{\delta \bar{H}}{\delta \psi_\alpha}.$$

Giunti a tal punto la quantizzazione può attuarsi in modo analogo a quanto prima è stato esposto, ottenendosi dunque in questo caso la quantizzazione del continuo. Si dovrà cioè porre, indicando sinteticamente con P le tre coordinaie x, y, z di un punto ed essendo $\delta_{\alpha\beta} = 1$ se $\alpha = \beta$, 0 se $\alpha \neq \beta$ e $\delta(P - P') = 0$ per $P \neq P'$ e $\int \delta(P - P') dv_p = 1$ se P' si trova in v_p ed uguale a zero se questo non si verifica,

$$\begin{aligned} &\Pi_\alpha(P)\psi_\beta(P') - \psi_\beta(P')\Pi(P) = \delta_{\alpha\beta}\delta(P - P')\frac{h}{2\pi i} \\ &\Pi_\alpha(P)\Pi_\beta(P') - \Pi_\beta(P')\Pi_\alpha(P) = \psi_\alpha(P)\psi_\beta(P') - \psi_\beta(P')\psi_\alpha(P) = 0. \end{aligned} \qquad (II)$$

Da queste relazioni (II) si ricava che le particelle connesse con queste onde sono tutte uguali fra di loro, ed inoltre obbediscono alla statistica di Bose, e cioè si ottengono propriamente i risultati che si volevano raggiungere. In entrambi i procedimenti esposti si è ottenuto la quantizzazione del

continuo partendo sempre da concetti fondati sulla continuità: nel primo di essi si è attuata la decomposizione dell'oscillazione in serie di Fourier, nel secondo, come si è visto, si è fatto uso di concetti assolutamente generali senza riferimento a speciali tipi di onde, oppure a decomposizioni di queste onde con oscillazioni elementari.

Ma merito del Jordan [8]) è stato quello, pur rimanendo per semplicità nel caso unidimensionale, di ottenere la quantizzazione del continuo quale procedimento al limite dal discontinuo; questo procedimento ha importanza perchè essendo più consono alla realtà dà valore al procedimento precedente, inoltre la deduzione che ora si espone è indipendente dalla decomposizione dello spostamento nelle sue componenti. Si consideri dunque la corda suddivisa in numero di n di parti ognuna di massa $m = \frac{1}{n}$, e sia q_i l'elongazione del punto iesimo qualsiasi della corda, e $p_i = m\dot{q}_i$ l'impulso corrispondente. Le condizioni (I) che si applicano in questo caso discontinuo assumono la forma

$$[p_i, q_k] = \frac{h}{2\pi i}\delta_{ik} \qquad [p_i, p_n] = [q_i, q_n] = 0.$$

Sommiamo ora queste relazioni supponendo che n tende all'infinito relativamente a tutti quei punti i che cadono nell'intervallo Δl della corda si ha

$$\sum_{\Delta l} \frac{1}{n}[\dot{q}_i, q_k] = \frac{h}{2\pi}\begin{cases} 1 \text{ se } k \text{ è in } \Delta l \\ 0 \text{ se } k \text{ non è in } \Delta l. \end{cases}$$

Al limite le somme si trasformano nell'espressione $\int [\dot{q}'(x')\, q(x)]\, dx$ per l'intervallo Δl, e si ottiene 1, o 0 a seconda che x' capita o meno nell'intervallo, e quindi utilizzando il simbolo δ di Dirac si ha

$$[\dot{q}(x'), q(x)] = \frac{h}{2\pi i}\delta(x - x')$$

insieme alle relazioni:

$$[\dot{q}(x')\, \dot{q}(x)] = [q(x'), q(x)] = 0.$$

Ora è facile vedere secondo Jordan che questi risultati sono perfettamente equivalenti a quelli che si sono ottenuti precedentemente, e cioè procedendo alla decomposizione dello spostamento nelle sue componenti armoniche, che naturalmente sono in numero infinito.

---

[8]) Jordan. Loc. cit., pag. 221.

In effetti

$$q_k = \frac{2}{l} \int_0^l u \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x dx$$

e facendo per semplicità $l = 1$ si ha

$$[p_k, q_k] = 2 \left[\int_0^1 \dot{u}(x) \operatorname{sen} k\pi x dx, \int_0^1 u(x) \operatorname{sen} j\pi x dx \right] =$$

$$= 2 \frac{h}{2\pi i} + \int_0^1 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx dx = \frac{h}{2\pi i} \delta_{kj}.$$

Si è visto così che la quantizzazione del continuo può attuarsi quale un passaggio al limite. Mentre la decomposizione che si è attuata sullo esempio precedente è possibile quando le equazioni sono lineari, quanto sopra è stato attuato, che evita la decomposizione, è applicabile in ogni caso anche per equazioni non lineari, e cioè è possibile la quantizzazione pure per processi ondulatori come quelli che si hanno nell'elettromagnetismo quantistico nel quale se si considera anche la materia, compaiono equazioni di campo non lineari.

Attuata in un qualunque dei modi esposti la quantizzazione del continuo si ottengono in tutte le deduzioni, che possono ricavarsi dalle formule risultati che coincidono con quelli che si ricavano empiricamente partendo cioè da formule in accordo coi risultati sperimentali, e così per es. il calcolo del valore medio della fluttuazione dell'energia della radiazione nera ricavato in base alle formule scritte è quello che si ottiene partendo dalla formula quantistica di Planck considerata quale formula empirica.

L'introduzione nella teoria di una funzione ψ che dipende dal punto generico che si considera, funzione definita in tutto lo spazio significa in sostanza considerare un sistema meccanico ad infinite variabili; il problema è visto così essenzialmente in base a concetti di continuità; l'aggiunta delle condizioni di quantizzazione (I) trasforma questo sistema meccanico ad infinite variabili in un'assieme di particelle dotate di proprietà ondulatorie, proprio secondo quanto è richiesto dalla esperienza.

4. In questi problemi e essenziale il fatto che il numero delle particelle non è un parametro che interviene nelle considerazioni, e cioè tutte le deduzioni che si ricavano sono indipendenti dal numero delle particelle. D'altra parte sono state considerate finora equazioni omogenee; ma nella teoria ondulatoria che prima e stata considerata, e cioe quella delle onde elettromagnetiche che rappresenta una prima fondamentale teoria della Fisica dei campi, l'equazione omogenea descrive la propagazione delle onde

senza che ci siano fenomeni di assorbimento od emissione; questi eventi invece si realizzano quando si considerano nello spazio cariche elettriche. Queste entità in tali problemi sono considerate come dati empirici; in altre parole si rinunzia in questo atteggiamento ad una qualsiasi interpretazione ondulatoria o corpuscolare, non si affronta in altre parole in questo primo stadio della teoria la possibilità di descrivere anche la densità elettrica mediante un campo quantizzato.

Le cariche elettriche, che sono dati dal problema, si considerano non influenzate dal campo da esse prodotto, ipotesi naturalmente che può considerarsi valida solo nel caso che l'azione delle onde elettromagnetiche sulle cariche sia molto piccola. Pur con tale limitazione i successi che si ottengono sono, com'è noto, notevoli; si riesce infatti a spiegare la produzione e l'assorbimento delle onde elettromagnetiche, e cioè l'aumento e la diminuzione dei fotoni, che sarebbero appunto le particelle relative a quelle onde quantizzate. Di qui concludendo si ricava che l'equazione ondulatoria non omogena, il cui secondo membro rappresenta la densità dell'ente che ha interazione con le particelle, permette di descrivere, entro determinate limitazioni, i processi di produzione e di scomparsa delle onde quantizzate.

5. Nella quantizzazione del continuo si sono sempre esclusivamente applicate le condizioni (I) che, come si è detto, sono state considerate per la prima volta nel caso della Dinamica quantistica di un'unica particella. Le (I) com'è stato detto sono da considerare come le equivalenti quantistiche delle parentesi di Poisson, le quali rappresentano anche l'invarianza del determinante funzionale rispetto a trasformazioni canoniche.

Dunque le (I) sono da collegarsi ad una proprietà invariantiva e cioè a *qualche elemento che rimane fisso* per qualunque sistema di variabili coniugate, ed estrapolando queste condizioni al continuo si è proceduto in modo soddisfacente; le particelle così descritte risultano tutte uguali, indiscernibili ed obbediscono alla statistica di Bose. Com'è noto in questa statistica si ammette che le particelle che possono trovarsi nella stessa celletta dello spazio di fase sono in numero indeterminato. Ma non tutte le particelle che sono finora conosciute obbediscono a tale speciale postulato. Gli elettroni per es. invece obbediscono alla statistica di Fermi, nella quale si ammette che in ogni colletta dello spazio di fase si può localizzare o una o nessuna particella. Ora non può fare molto meraviglia che le (I) applicabili ad una particella che ha quel speciale carattere *ondulatorio corpuscolare* che porta a quei particotari risultati che si riscontrano appunto nella Dinamica quantistica di un'unica particella, siano anche valevoli per un insieme di particelle che senza limitazione possono trovarsi in tutti gli stati quantici in quanto che non si richiede in un'assieme di quanti di più di ciò che si richiede per una sola particella; nel caso della statistica di Fermi la quale in sostanza con l'impossibilità postulata che due particelle occupino la stessa colletta dello spazio di fase, afferma un comportamento così speciale

per le varie particelle, è prevedibile che le condizioni di quantizzazione che devono naturalmente esistere, e che devono produrre il processo di quantizzazione anche per queste onde, devono essere diverse da quelle valide nel caso nel quale le particelle *quantistiche* possono trovarsi senza esclusione fra di loro nella stessa cella dello spazio di fase. Le particelle che obbediscano alla teoria di Fermi devono avere proprietà diverse da quelle della statistica di Bose; queste infatti come si è già visto, oltre quelle speciale interdipendenza che in base a quanto è stato detto a proposito di una analisi fondamentale di Landè deve sempre immaginarsi esistente fra le varie particelle, sono in un certo senso indipendenti fra di loro. La ricerca delle speciali condizioni di quantizzazione relativa alla statistica di Fermi si fa in modo analogo a quello usato per la quantizzazione delle onde che seguono la statistica di Bose [9]), e cioè l'assieme di particelle si rappresenta, secondo un procedimento consueto, come dato da un'onda d'ampiezza ψ nello spazio x, y, z, e quest'onda si esprime mediante una serie di autofunzioni caratteristiche dello speciale problema ondulatorio che è connesso con le particelle in esame, ma dovendo rappresentare come si è detto la $\psi(x, y, z)$ un'assieme di particelle, i coefficienti dello sviluppo della ψ in una serie di autofunzioni non si considerano più numeri classici ma matrici.

Procedendo in tal modo si considera l'assieme delle particelle senza lasciare lo spazio tridimenzionale, e cioè in un certo modo si quantizza già l'onda che rappresenta la particella, ecco perchè tale processo è detto di *seconda quantizzazione*. I coefficienti dello sviluppo che sono matrici godono delle proprietà che il prodotto di ognuno di essi per il suo complesso coniugato dà il numero di particelle che si trovano nello stato energetico caratteristica dell'autofunzione relativa. Ricordate queste condizioni generali è facile vedere quale condizioni devono aversi nel caso della statistica di Fermi; in questa statistica il numero di particelle in uno stato energetico non può essere che uno o zero, quindi queste matrici che a_m sono i coefficienti dello sviluppo devono soddisfare alle condizioni $a_m a'_m = N_m$ con $N_m \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$. La ricerca delle matrici che soddisfano queste condizioni opera di Jordan e Wigner è stata coronata da successo; queste matrici possono per es. essere del tipo $a_m = \eta_m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $a'_m = \eta'_m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $|\eta_m|^2 = 1$ per le quali valgono le relazioni $a'_m a_m + a_m a'_m = 1$ che devono poi essere completate dalle altre analoghe

$$a_m a_m = 0 \qquad a'_m a'_m = 0.$$

In tal modo vengono fissate le condizioni di quantizzazione nel caso che le particelle obbediscono alla statistica di Fermi. Queste relazioni sono

---

[9]) Jordan e Wigner. Zeit. für Phys., V. 47, pag. 631 (1928).

essenzialmente diverse dalle (I), e quindi mentre con la statistica di Bose si può affermare che c'è una corrispondenza fra le relazioni di quantizzazione ed una speciale espressione della meccanica analitica e precisamente con quella che afferma che le p_k e q_k trasformate di due variabili coniugate, sono ancora canoniche, quest' analogia più non esiste nel caso che si quantizzi in base al principio di esclusione. È ancora da notare che la corrispondenza fra le (I) e la relazione classica non è corrispondente a quella abituale, nella quale la relazione classica si ottiene dalla quantistica facendo tendere h a zero, perchè la quantità a secondo membro delle (I) è $\frac{h}{2\pi i}$, mentre nel caso classico è invece uguale ad 1; in ogni modo anche questa vaga analogia nel caso della statistica di Fermi manca.

6. La formulazione precedente della teoria quantistica del continuo evidentemente non è relativistica; in essa in effetti il tempo non è considerato come coordinata equivalente alle tre coordinate spaziali, e ciò rappresenta una notevole limitazione al valore generale della teoria suesposta. Un' accurata e profonda ricerca di Heisenberg e Pauli [10]) ha potuto eliminare dalla teoria questa grave limitazione. Questi infatti hanno modificato le relazioni (I) in modo da tener conto di quantità q e p che siano funzione anche del tempo. In conseguenza le (I) assumono un aspetto diverso, ed il punto importante che è stato dimostrato è che le (I) così modificate sono invarianti rispetto ad una trasformazione di Lorentz.

7. Nel caso generale di un campo qualsiasi la funzione che interessa e che si quantizza è una $\psi(x, y, z)$ caratteristica dello speciale problema che viene trattato, ed è stato possibile mostrare [11]) l' invarianza delle (I) relativa non più alle p_k e q_k ma alle ψ caso per caso. Questi risultati permettono dunque d' affermare che si e ormai giunti ad una formulazione teorica che riesce a spiegare la discontinuità in base al postulato della quantizzazione opportunamente modificato, e ciò non limitatamente ai moti lenti, ma per qualunque valore della velocità che possono assumere le particelle. In altre parole la teoria quantistica nei suoi due aspetti, e cioè sia per le soluzioni simmetriche che per quelle antisimmetriche, sia per la statistica di Bose che per quella di Fermi è coerente con la teoria relativistica. Le due limitazioni imposte dalle due costanti c e h alla concezione abituale del mondo (spazio distinto dal tempo, previsione accurata dei fenomeni) in questo particolare problema possono essere considerate assieme senza che si presentino altre difficoltà. Come già è stato accennato precedentemente, nella quantizzazione del continuo vengono introdotte quali enti caratteristici le ψ (funzioni di ogni punto nello spazio) e lo studio delle proprietà delle particelle viene riportato allo studio del campo quantizzato

---

[10]) Heisenberg e Pauli. Zeit. für Phys., V. 56-1 (1929).

[11]) Wentzel. *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder.*

che le rappresenta. La Fisica degli assiemi nel caso più generale, quando cioè si considerano le particelle che sono anche in interazione fra di loro diventa dunque una Fisica di *campi ondulatori quantizzati*. Il grande risultato che è stato ottenuto in questo tipo di ricerche teoriche consiste nel fatto che in esso sono state considerate funzioni di campo non solo scalari, ma anche di diverso tipo geometrico, e cioè spinori, vettori, tensori, e cioè enti geometrici distinti, individuati da diverso numero di componenti, ed a cui competono diverse leggi di trasformazione. Un campo individuato da una quantità scalare ha evidentemente una componente, un campo vettorale quattro componenti ecc. La ragione profonda della necessità dell'impiego nella Fisica dei campi di enti geometrici diversi dipende da un punto fondamentale: com'è noto le particelle elementari, per le quali la nostra conoscenza sia teorica che sperimentale sono un pò più progredite, e cioè il fotone, l'elettrone positivo e negativo, il mesone (di cui sappiamo solo la massa e il valore dello spin) hanno parametri fisici diversi, e precisamente *la massa* la cui diversità s'esprime nell'equazioni che individuano la particella mediante un coefficiente, *la carica*, di cui si dà ragione usando campi di grandezze reali per particelle neutre e campi complessi per particelle dotate di carica, questa però viene considerata analogamente alla massa quale parametro che non si interpreta in alcun modo, ma s'introduce come dato sperimentale, ed infine *lo spin*.

L'interpretazione di quest'ultima proprietà ha ottenuto un reale vantaggio dalla Fisica dei campi, poichè risultato fondamentale ricavato in queste indagini è che le equazioni che si riferiscono a particelle di diverse spin sono equazioni relative ad enti geometrici diversi [12]), più precisamente le particelle che sono caratterizzate da spin 0 sono rappresentate da onde chè s'individuano mediante grandezze scalari, quelle di spin 1/2 mediante grandezze spinoriali, quelle di spin 1 mediante grandezze vettoriali, quelle di spin 3/2 mediante spinori di rango 3/2, quelle di spin 2 mediante tensori di rango 2 e così via. È caratteristico ancora il fatto che man mano che aumenta la grandezza della spin aumenta la complessità del comportamento della particella ed il numero di componenti di essa, aumenta cioè il rango della grandezza geometrica che la rappresenta. Com'è noto l'elettrone ha lo spin minore, che ha valore 1/2, e l'ente geometrico che lo può rappresentare è lo spinore, esso può considerarsi come un vettore di rango 1/2.

Ricerche matematiche recenti hanno mostrato che è possibile un'unificazione di questi nel senso che enti geometrici di rango superiore a quello dello spinore quali i vettori ed i tensori, possono ricondursi al calcolo degli spinori [13]); in altre parole una relazione fra vettori e tensori può anche

---

[12]) WENTZEL, Loc cit.

[13]) VAN DER WAERDEN. *Die gruppentheoristische Methode in der Quantenmechanik.* Berlin, (1932).

scriversi sotto forma di spinori di rango più elevato mettendo così sempre in evidenza un carattere spinoriale, che risulta più elevato, e quindi diverso da quello di rango 1/2, ma d'altra parte si ottiene in tal modo una certa omogeneità nelle diverse relazioni tensoriali, vettoriali. Insomma risulta dalla prima indagine di DIRAC sull'elettrone, la quale ha portato appunto alla scoperta di enti con legge di trasformazione speciale, e cioè la legge degli spinori, che gli enti geometrici fondamentali possono effettivamente considerarsi gli spinori, ai quali gli altri in certo modo sono da considerarsi collegati. Naturalmente queste condizioni che permettono di scrivere una qualunque legge relativa a quantità vettorali o tensorali sotto forma di legge di spinori di rango più elevato dal punto di vista fisico sono essenzialmente formali, la caratteristica essenziale di questi vari enti spinori, vettori, tensori, è evidentemente la legge di trasformazione, e questa rimane immutata anche quando questi enti geometrici si riducono a spinori di rango più elevato. Però c'è il vantaggio che viene ad essere uniformato il ragionamento, e cioè gli spinori rientrano nel quadro generale di tutte le grandezze geometriche, anzi da un certo punto di vista l'unificazione di trattazione del punto di vista spinoriale riesce utile in quanto dimostra le diversità esistenti fra le varie particelle [14]). Così scrivendo le equazioni di MAXWELL in forma spinoriale viene ancora mostrata la profonda diversità intercorrente fra i quanti di luce e gli elettroni.

Il punto che a noi interessa particolarmente di accentuare in questi problemi è il seguente: le particelle sono individuate da vari enti geometrici più o meno complessi a seconda del valore dello spin, e questi enti hanno leggi di trasformazione caratteristiche quando si cambiano gli assi, connessi fra di loro da una trasformazione di LORENTZ; la conoscenza di questa legge di trasformazione individua perfettamente le particelle e cioè stabilisce il valore dello spin che ad essa compete, essa solo dunque è sufficiente a determinare qual'è questo valore.

Le teorie fisiche possono limitarsi allo studio di fenomeni nei quali intervengono moti lenti ed allora esse possono prescindere dai risultati relativistici; volendo invece costruire una teoria che sia valida per qualunque valore della velocità è necessario che siano rispettati i postulati della teoria relativistica. Nello studio della quantizzazione del continuo i fondatori della teoria e principalmente HEISENBERG e PAULI si sono preoccupati di giungere a formulazioni invariantive rispetto alla trasformazione di LORENTZ e quindi la teoria delle onde quantizzate è stata costruita anche per manifestazioni nelle quali le velocità delle particelle possono assumere tutti i valori possibili. Questa impostazione generale del problema che rientra cioè nel quadro relativistico è particolarmente giovevole in quanto che, com'è noto, la teoria di relatività permette in primo luogo di comprendere

[14]) LAPORTE e UHLENBECK, Phys. Rev. V. 37 (1931).

l'esistenza dello spin, ed inoltre di giustificare, come ora si è visto, il valore dello spin dalla conoscenza della legge di trasformazione. Ma ancora un grande vantaggio dà la trattazione relativistica di questi problemi: trattando il problema generale di particelle con spin qualunque FIERZ [15]) ha raggiunto un risultato importantissimo per ciò che riguarda il segno della densità energetica delle particelle: se lo spin è intero l'energia totale è definita-positiva (e la carica totale indefinita); per spin frazionario la carica totale è definita e l'energia è indefinita e cioè si ritrova per spin frazionario, ma di qualunque valore lo stesso risultato che si è avuto per lo spin uguale ad 1/2. D'altra parte per la presenza nella Natura della discontinuità quantistica, e cioè della possibilità dei salti fra stati energetici distinti, nella teoria quantistica bisogna eliminare le anomalie che si riscontrerebbero in Natura se fosse possibile ammettere la presenza di stati energetici negativi; e com'è ben noto l'eliminazione almeno formale degli stati negativi pur con delle difficoltà concettuali gravi non ancora sormontate può farsi mediante una quantizzazione del tipo PAULI, e cioè mediante il principio della esclusione; poichè si dimostra che le particelle con spin frazionario hanno energia non definita per eliminare la presenza di stati energetici negativi queste particelle devono dunque essere quantizzate secondo PAULI, mentre quelle che hanno spin pari ed energia definita obbediscono alla statistica di BOSE. Di qui si vede che il principio di relatività applicato alla teoria dei campi quantizzati, almeno da un punto di vista formale, spiega uno dei fatti fondamentali che si riscontrano, e cioè la diversità di statistica per le varie particelle, e cioè quelle dell'arbitrarietà o incompiutezza che compariva nella teoria quantistica, circa la scelta di funzioni simmetriche o antisimmetriche, viene eliminata dall'esigenza relativistica o meglio viene ad essere in certo senso rimandata all'interpretazione di quella assunzione di DIRAC di ritenere occupati tutti gli stati d'energia negativa con la conseguente difficoltà che nasce da queste assunzioni della polarizzabilità infinita del vuoto, difficoltà d'altra parte presente anche in altre teorie meno radicali.

8. La Fisica dei campi può considerarsi essenzialmente nelle sue origini quale teoria classica; essa in effetti acquista una piena maturità quando si giunge alla formulazione definitiva dell'elettromagnetismo.

Un indirizzo particolarmente importante nella Fisica dei campi si è avuto con lo sviluppo della teoria della relatività generalizzata, che in un ulteriore sviluppo nelle così dette teorie unitarie dovute principalmente all'EINSTEIN stesso, al WEYL, all'EDDINGTON ed infine ancora all'EINSTEIN [16]) ha tentato di raggiungere una unificazione dei due campi di forze allora

---

[15]) FIERZ, Helv. Phys. Ac. V. 12-3 (1939). — FIERZ e PAULI, Phys. Rev. V. 58 pag. 715 (1940).

[16]) LANCZOS, Erg. der esakt. Naturwiss. V. 10 pag. 97.

noti, e cioè quello gravitazionale e quello elettromagnetico. Questo processo era attuato arricchendo opportunamente con proprietà speciali la geometria dello spazio in modo da ottenere come risultati unitari, conseguenze di proprietà geometriche dello spazio fisico, sia il campo gravitazionale sia il campo elettromagnetico. Da un punto di vista più moderno si può ora vedere che con tale indirizzo si era fuori strada; in effetti se le teorie unitarie arricchiscono le nostre conoscenze geometriche, non portano com'è noto a risultati soddisfacenti da un punto di vista fisico, in esse non si affronta il processo di quantizzazione nè si cerca di stabilire le proprietà delle particelle elementari, e principalmente il loro caratteristico spin; d'altra parte la introduzione nella teoria di particelle con proprietà diverse ha mostrato che nel mondo esiste ancora un tipo di forze prima assolutamente ignorate, e cioè le forze nucleari. Ora queste manifestazioni delle particelle elettrizzate, e cioè le manifestazioni elettromagnetiche e le manifestazioni nucleari sono in certo modo soddisfacentemente descritte da equazioni ondulatorie caratteristiche; è possibile ottenere *un'unitarietà* e cioè uno stesso tipo di descrizione anche per le manifestazioni gravifiche?

Ciò è perfettamente possibile, però solo in prima approssimazione. Infatti considerando masse materiali sufficientemente piccole ci si può limitare a considerare soltanto i termini lineari delle equazioni gravitazionali di Einstein [15]). Questa ammissione significa ritenere le g_{ik} di poco diverse dai valori galileiani δ_{ik}, e cioè

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik} \tag{1}$$

con le quantità γ_{ik} molto piccole, tali cioè da considerare trascurabili i quadrati ed i prodotti di queste. Con tali ammissioni le equazioni gravitazionali di Einstein ben note

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = - k \, T_{ik} \tag{2}$$

assumono l'aspetto seguente, dove $\gamma = \sum_\alpha \gamma\alpha\alpha$:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_\alpha \left[\frac{\partial^2 \gamma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{i\alpha}}{\partial x_k \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \gamma_{k\alpha}}{\partial x_i \partial x_\alpha} - \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2_\alpha} - \sum_\beta \frac{\partial^2 \gamma\alpha\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \delta_{i\alpha} \right] = - 2k \, T_{ik} . \quad (2)$$

Queste equazioni introducendo le quantità

$$\gamma_{ik} = \gamma'_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \gamma \tag{3}$$

possono anche scriversi

$$\sum_{\alpha}\left[\frac{\partial^2\gamma'_{ik}}{\partial x^2_\alpha}-\frac{\partial^2\gamma'_{i\alpha}}{\partial x_k\,\partial x_\alpha}-\frac{\partial^2\gamma'_{k\alpha}}{\partial x_i\partial x_\alpha}+\delta_{ik}\sum_{\beta}\frac{\partial^2\gamma'\alpha\beta}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right]=-2k\,T_{ik}. \qquad (4)$$

Si può mostrare [17] che nell'ipotesi suddette e cioè che le g_{ik} siano soltanto poco distinte dai valori galileiani si può sempre scegliere un sistema di coordinate per il quale risulta valida la relazione

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma_{i\alpha}}{\partial x'_\alpha}=0 \qquad (5)$$

per cui le (4) ulteriormente si semplificano dando luogo ad equazioni ondulatorie del tipo

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma'_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}=-\,2k\;T_{ik}.$$

Ora il sistema d'equazioni (2), con l'aggiunta delle (5), deduzione diretta dell'equazioni gravitazionali di Einstein e coincidente con le equazioni ondulatorie caratteristiche di particelle dotate di spin 2 e di massa 0. Studiando particolarmente la propagazione di un'onda gravitazionale, Einstein [18] ha trovato che essa è perfettamente individuata da cinque componenti così come è richiesto per onde che rappresentano particelle di spin $s=2$, infatti $n=2s+1=5$.

Nel caso particolare che qui si tratta, e cioè di onde gravitazionali, l'ampiezza di queste onde rappresenta la variazione del potenziale gravitazionale e cioe queste onde trasportano la variazione geometrica dello spazio, quindi, come è postulato fondamentale della teoria di relatività generalizzata, la materia condiziona la geometria; la forze newtoniana in realtà è fittizia poichè il moto delle particelle è moto geodetico, ma nella teoria di prima approssimazione che qui si accenna, la geometria è appunto trasportata da queste onde di spin 2 e massa 0. Indubbiamente la deduzione dell'equazioni di Fierz relative a particelle di spin maggiore di 0,1 a $\frac{1}{2}$, ed il riconoscimento che le equazioni gravitazionali in prima approssimazione sono le onde di spin 2 e massa 0 porta ad un avvicinamento, ad una visione unitaria delle manifestazioni, e cioe l'elettromagnetismo quantistico dovuto

---

[17]) Pauli, *Relativitätstheorie*, in Encycl. der Mat. Wissenschaft., pag. 736.

[18]) **Einstein, Berl. Ber. p. 154 (1918).**

a HEISENBERG. PAULI. FERMI e DIRAC [19]) interpreta anche le forze attrattive coulombiana come dipendente da particelle di massa 0 e spin 1; una concezione analoga permette d' interpretare le forze ora messe in evidenza fra neutroni e protoni e cioè le forze nucleari. e queste sarebbero dovute al campo mesonico. Ora il problema gravitazionale nella sua generalità porta alla considerazione di 10 funzioni g_{ik} del punto dello spazio-tempo le quali individuano la geometria dello spazio. ma limitatamente ad un problema di prima approssimazione le grandezze che sono necessarie per individuare le condizioni geometriche risultano corrispondenti ad ampiezze d' onde caratteristiche di particelle di massa 0 e spin 2; nel caso gravitazionale la comparsa della forza newtoniana è sempre condizionata alla modifica geometrica dello spazio, modifica trasportata mediante queste onde gravitazionale. Come vedesi dunque l' unitarietà della descrizione non è raggiunta nel senso primitivo nel quale si cerca di ridurre i due campi noti l' elettromagnetismo ed il gravitazionale ad un unico campo. Nella nuova concezione le particelle di vario tipo sono ancora *dati empirici* che si comportano secondo equazioni che sono state ricavate per certi tipi; il campo gravitazionale non si riduce al campo elettromagnetico; è entità distinta da questo, come anche il campo, ora conosciuto, delle forze nucleari. L' unitarietà raggiunta almeno in prima approssimazione riguarda solamente la descrizione dei fenomeni, ma si considerano come elementi fondamentali dei fenomeni le entità elementari che risultano distinte, e che non sono ancora interpretate in senso unitario: rimangono così i valori delle masse, della carica. che è sempre la stessa, degli spin quali dati sperimentali.

---

[19]) Cfr. WENTZEL, Loc. cit. — FERMI, Rev. of mod. Phys. 4. p. 87 (1932). — KRAMERS, Hand. und Jahrbuch der Chem. Phys. di Eucken e Wolf, V. I (1938).

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 novembre 1942.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. DE LORENZO, i soci ordinari BAKUNIN, CACCIOPPOLI, CARNERA, CARRELLI, DE DOMINICIS, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, LONGO, PIERANTONI, SPAMPINATO, ed i corrispondenti nazionali IMBÒ, MILONE, SALFI, SCHERILLO.

Il presidente comunica che con Decreto Reale dello scorso 8 agosto sono stati nominati soci ordinari nella sezione di Scienze naturali i professori Filippo SILVESTRI ed Alberto DE DOMINICIS e nella sezione di Scienze matematiche i professori Gian Domenico MATTIOLI e Nicolò SPAMPINATO, e che con l'autorizzazione del Ministro dell'Educazione nazionale è stato nominato socio corrispondente nella sezione di Scienze naturali il prof Antonio SCHERILLO.

Il segretario informa che, in base all'art. 22 dello Statuto, il presidente ha fissato il seguente calendario per le tornate ordinarie del nuovo anno accademico: novembre 7, dicembre 5, gennaio 2, febbraio 6, marzo 6, aprile 3, maggio 1.°, giugno 5. — Indi comunica la lettera 19 ottobre 1912 del Presidente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo relativa al concorso 1943-45 della fondazione di studio « SENSALES » (primo premio di lire 28.000, secondo premio di lire 11.000) sopra un tema specifico di Chimica. L'Accademia decide di rimandare alla prossima adunanza di dicembre la proposta del tema per il concorso predetto.

Fra le pubblicazioni pervenute in omaggio, il segretario segnala quelle del presidente DE LORENZO sopra *Il cratere del Monte Nuovo disegnato da Francisco de Hollanda nel febraio del 1540*, e su *Le acque freatiche dei deserti conosciute ed utilizzate nell' antica India.*

Il socio LONGO presenta in omaggio ed illustra una sua nota dal titolo: *Comportamento di un individuo della seconda generazione del Melo « senza fiori »*.

Al prossimo Convegno internazionale dei Matematici, che avrà luogo in Roma nei giorni 8-12 novembre, l'Accademia ha aderito, facendosi rappresentare dal socio SPAMPINATO.

Il segretario presenta: 1.°) a nome del socio MALQUORI, che ne propone l'inserzione nel Rendiconto, una nota del dott. Luigi SANTARELLI, *Sulle caratteristiche tecniche e costituzionali del gesso da presa;* 2.°) a nome del socio SIGNORINI, che fa uguale proposta di accoglimento nel Rendiconto, una nota del prof. Carlo TOLOTTI, *Sulle equazioni lagrangiane dei sistemi continui in coordinate generali;* 3.°) a nome del socio RICCI, e con parere favorevole alla stampa nel medesimo periodico, due note dell'ing. Mario TURRA, *Sulla previsione delle tensioni in alcuni recipienti cilindrici*, e sopra *Talune proprietà dei campi elastici piani dedotte dal quadro delle*

isostatiche. L' Accademia approva, unanime, la stampa delle quattro note predette.

Il socio SPAMPINATO presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *Le Riemanniane degli S_r ipercomplessi.*

Il socio CARNERA presenta, per il Rendiconto, una sua nota sopra *L'ecclissi di luna del 26 agosto e quella di sole del 10 settembre 1942.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 dicembre 1942.

Presidenza del sen. DE LORENZO. Sono presenti i soci ordinari BAKUNIN, CACCIOPPOLI, CARNERA, COLAMONICO, DE DOMINICIS, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, GIORDANI, LONGO, MALQUORI, MATTIOLI, PIERANTONI, RICCI, SPAMPINATO, ed i corrispondenti nazionali IMBÒ, MILONE e SCHERILLO.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 7 novembre, che è approvato. Indi presenta il volume 1941-42 del Rendiconto, del quale è stata recentemente ultimata la stampa, e l'Annuario 1942-43 della Società Reale di Napoli, già distribuito ai soci.

Successivamente l' Accademia, invitata dalla consorella R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo a stabilire un tema specifico di Chimica per il prossimo concorso triennale 1943-45 della fondazione SENSALES, dopo aver preso visione dello Statuto di detta fondazione approvato con R. Decreto 25 aprile 1938, n. 906, e del relativo Regolamento, approva a voti unanimi il seguente tema: « *Contributo alla conoscenza della struttura dei composti chimici* », proposto dalla Commissione dei cinque soci precedentemente nominati fra i cultori di detta disciplina, e dà incarico all'Ufficio di Presidenza della Società Reale di Napoli di svolgere le ulteriori pratiche per il bando del concorso predetto.

Il segretario legge la *Relazione sui lavori compiuti dall' Accademia durante l' anno 1941-42*, da stamparsi nel Rendiconto.

Il socio corrispondente SCHERILLO legge la *Commemorazione del socio* Federico MILLOSEVICH, improvvisamente mancato ai vivi in Roma il dì 8 novembre scorso.

Lo stesso socio presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *Le lave attuali del Vesuvio. II. Lave del novembre 1941 e del febbraio 1942.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 gennaio 1943.

Sono presenti il presidente DE LORENZO, i soci ordinari BAKUNIN, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, GIORDANI, LONGO, PIERANTONI, RICCI, SPAMPINATO, ed i corrispondenti nazionali MILONE, NOBILE, SCHERILLO e ZIRPOLO.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 dicembre, che è approvato.

Il presidente annunzia con commossa parola l'immatura perdita, avvenuta in Napoli il dì 14 dicembre 1942, del socio corrispondente Gabriele Mammana.

Il socio Longo presenta ed offre in omaggio all'Accademia una sua pubblicazione *Sulla fioritura dell' Araucaria Bidwillei Hook.*

Indi l'Accademia discute affari di amministrazione interna.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 febbraio 1943.

Assistono all'adunanza, presieduta dalla socia anziana Bakunin, i soci ordinari Caccioppoli, Carnera, De Dominicis, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Mattioli, Pierantoni, Ricci, Spamfinato, ed i corrispondenti nazionali Imbò, Milone e Scherillo.

Il segretario legge il processo verbale della tornata del 2 gennaio, che è approvato. Indi comunica il bando di concorso della fondazione Sensales, amministrata dalla R. Accademia delle Scienze, Lettere ed Arti di Palermo, relativo al già proposto tema specifico di Chimica per il triennio 1943-45.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una nota del prof. Federico Amodeo dal titolo: *Caratteri delle diverse serie canoniche delle curve algebriche e Serie residue relative,* e legge una lettera dell' autore, che si dichiara disposto a sostenere le relative spese di stampa. L' Accademia approva.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 marzo 1943.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Malquori, Mattioli, Ricci, Spampinato, e il socio corrispondente Scherillo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del dì 6 febbraio che è approvato.

Il socio Carnera presenta una nota del dott. Tito Nicolini sopra *Un tipo di curva a curvatura distribuita come la densità della probabilità sulla legge normale,* proponendone l' accoglimento nel Rendiconto.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Andreoli e col parere di quest'ultimo favorevole alla stampa nel medesimo periodico, una nota del prof. Federico Amodeo, che dichiara di assumere per intero la spesa di stampa, dal titolo: *È possibile estendere il teorema di* Cremona *sulle curve iperellittiche alle curve di gonalità diversa da due?*

Sono entrambe approvate.

Processo verbale dell' adunanza del dì 3 aprile 1943.

Sono presenti il presidente sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carnera, De Dominicis, D'Erasmo (segretario), Diamare, Mattioli, Pierantoni, Ricci, ed i soci corrispondenti nazionali Imbò, Milone e Scherillo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza del dì 6 marzo, che è approvato.

Il presidente interpreta il sentimento dei colleghi, esprimendo al socio Eccellenza Francesco Giordani le più vive condoglianze per la dolorosa perdita del suo caro fratello ingegnere Camillo. Questi, cresciuto ed educato in una famiglia con antica tradizione di studio, di lavoro e di probità, di cui l' Eccellenza Giordani è così elevato esponente, è stato stroncato dalla morte nel pieno, giovanile vigore della sua attività, lasciando sulla terra la moglie e quattro figli adorati. Possano essi, in compenso, vivere felici, nel culto della memoria del perduto genitore.

Il socio Carnera presenta ed offre in omaggio all' Accademia, da parte del Comitato Nazionale per l' Astronomia, il *Catalogo di 2390 stelle osservate al cerchio meridiano del R. Osservatorio astronomico di Trieste negli anni 1931-32-33 e ridotte al 1925.0, da* Giovanni Peisino e Maria Campa, e ne discorre.

Processo verbale dell' adunanza del dì 1.° maggio 1943.

Assistono all' adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carrelli, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Mattioli, Pierantoni, Ricci, Spampinato, ed i corrispondenti nazionali Milone, Nobile, e Scherillo.

Il segretario dà lettura del processo verbale della tornata 3 aprile, che viene approvato.

Il socio Carrelli presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sulla deduzione del secondo principio della Termodinamica da un principio variazionale.*

Il socio Spampinato presenta, per il medesimo periodico, una sua nota dal titolo: *La varietà W_4^6 dell' S_8 complesso Riemanniana del piano biduale.*

Il socio Ricci presenta, con proposta di inserzione nel Rendiconto accademico, quattro note: la prima, dell' ing. Franco Jossa, dal titolo: *La statica dei prismi non seguenti la legge di* Hooke; le altre tre, dell' ing. Franco Mazzarella, con i titoli: *Determinazione della pressione esercitata su di un suolo elastico da una trave appoggiata su di esso (Nota II); Determinazione del carico critico di un cilindro caricato di punta e sottoposto a*

vincoli elastici; Semplificazione della soluzione di un sistema di equazioni lineari. — L'Accademia approva la stampa delle quattro note predette, con le limitazioni in vigore.

Processo verbale dell'adunanza del dì 17 febbraio 1944.

Presiede il sen. De Lorenzo, segretario il socio D'Erasmo. Risultano presenti i soci ordinari Bakunin, Caccioppoli, Carrelli, Colamonico, Diamare, Malquori e Pierantoni.

Nell'aprire l'adunanza dopo le vicende dello scorso autunno, che portarono alla distruzione pressochè completa della sede della Società Reale di Napoli e della sua ricca biblioteca, il presidente dà notizia delle modifiche recentemente apportate, per disposizione del Comando Militare Alleato, nella compagine sociale — delle quali venne data più ampia e dettagliata comunicazione nell'adunanza plenaria della Società Reale, riconvocata dal medesimo Comando Alleato il giorno 17 febbraio — e ricorda, con commossa parola, i nuovi lutti da cui fu funestata l'Accademia dopo la precedente adunanza del 1.° maggio 1943 con la scomparsa dei due soci ordinari Marcolongo Roberto e Ricci Carlo Luigi e del socio corrispondente nazionale Zirpolo Giuseppe, dei quali sarà tenuta in altra adunanza degna commemorazione, da stamparsi, come di consueto, nel Rendiconto.

Quanto alle disposizioni del Governo Alleato riguardanti la compagine sociale della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche, si comunica che vennero revocate le nomine dei soci corrispondenti stranieri Tanakadate Hidezò Simotomai, Buchner Paolo, Blaschke Wilhelm, e del socio corrispondente nazionale Andreoli Giulio.

Si passa quindi alle proposte di nomina di nuovi soci, secondo l'ordine del giorno precedentemente diramato.

Il sen. De Lorenzo propone, che a socio straniero nella sezione di Scienze naturali venga nominato il Lt. Colonnello George Robert Gayre, autore di numerosi lavori di antropologia concernenti in modo speciale le questioni razziali europee e già direttore dell'Istituto di Antropologia di Edinburgh. L'Accademia approva alla unanimità.

Il presente processo verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 aprile 1944.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Malquori, Pierantoni, e il socio corrispondente nazionale Nobile.

Il presidente comunica le recenti deliberazioni del Consiglio di Presidenza della Società Reale relative alle economie introdotte nel bilancio del corrente anno accademico e alla continuazione della pubblicazione del Rendiconto, che comprenderà in un unico volume le note ed i processi verbali relativi ai due anni 1943 e 1944.

Il sen. DE LORENZO presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: « *Lo scritto di* KANT *sulla fine di tutte le cose* », e ne discorre.

Fra le pubblicazioni recentemente giunte in omaggio è segnalata una nota dello stesso socio DE LORENZO dal titolo: « *Shakespeare e Napoleone. Un paragone* ».

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 maggio 1944.

Sono presenti il presidente sen. DE LORENZO, i soci ordinari BAKUNIN, CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, D' ERASMO (segretario), MALQUORI, PIERANTONI ed il corrispondente nazionale IMBÒ.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 4 aprile, che è approvato. Indi segnala, fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, la nota del presidente DE LORENZO « *Lo scritto di* KANT *su La fine di tutte le cose* » e quella del socio CARRELLI « *Sulla deduzione del 2.° principio della Termodinamica da un principio variazionale* ».

Il socio D' ERASMO presenta, per il Rendiconto, una nota del prof. Antonio PARASCANDOLA dal titolo: *L' eruzione vesuviana del marzo 1944: I. I prodotti piroclastici.* L' Accademia approva all' unanimità.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 giugno 1944.

Presidenza del sen. DE LORENZO. Presenti i soci ordinari BAKUNIN, CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, D' ERASMO (segretario), MALQUORI, PIERANTONI. e i soci corrispondenti nazionali IMBÒ e NOBILE.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 2 maggio 1944, che è approvato.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio viene segnalata la *Relazione per l' anno 1942 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli*, offerta dal socio LONGO Il presidente ringrazia.

La socia BAKUNIN presenta una nota sua e della dott. A. ACCURSO dal titolo: *Isomerie spaziali nella serie degli acidi cinnamici. Acidi fenilnitrocinnamici.*

Il socio PIERANTONI legge la *Commemorazione del socio corrispondente Giuseppe* ZIRPOLO, la quale verrà inserita nel Rendiconto.

Il socio CARNERA presenta, per il medesimo periodico, una sua nota dal titolo: *L' Ufficio centrale delle latitudini negli anni 1941-1944.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 dicembre 1944.

Sotto la presidenza della socia anziana BAKUNIN si riuniscono i soci ordinari CACCIOPPOLI, CARNERA, COLAMONICO, DE DOMINICIS, D' ERASMO (segretario), DIAMARE, GIORDANI, LONGO, MALQUORI, PIERANTONI, ed i corrispondenti nazionali MILONE, NOBILE, PASCAL e SALFI.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 6 giugno, che è approvato. Indi informa i soci che a norma dell' art. 22 dello Statuto è stato fissato il calendario delle tornate ordinarie dell' anno accademico 1944-45, le quali avranno luogo il primo martedì di ciascun mese, alle ore 11.

La socia BAKUNIN comunica le dimissioni presentate dal sen. DE LORENZO dagli uffici di presidente generale della Società Reale e di presidente dell' Accademia di Scienze fisiche e matematiche, e, spiegate le ragioni che le hanno determinate, esprime il proprio avviso che l' Accademia possa rimanere in fiduciosa attesa prima di prendere qualsiasi decisione al riguardo. L' Accademia approva.

Il segretario presenta una nota del socio corrispondente IMBÒ sopra *Il parossismo vesuviano del marzo 1944*, corredata da alcune figure intercalate. L' Accademia ne approva la stampa nel Rendiconto.

Il socio D' ERASMO presenta una nota dell' ing. Felice IPPOLITO, *Intorno ad una nuova teoria sull' origine del Sial e sull' orogenesi*, proponendone l' inserzione nel Rendiconto con le limitazioni vigenti. Uguale proposta di accoglimento nel medesimo periodico fa il socio GIORDANI, presentando una nota del prof. Alfredo RITTMANN su *Le temperature nella crosta terrestre e l' orogenesi.* — L' Accademia si riserva di deliberare, dopo che avrà conosciute le attuali disponibilità di bilancio circa la stampa del predetto periodico, anche in rapporto alle presenti difficoltà di carattere generale.

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 gennaio 1945.

Sotto la presidenza della socia anziana BAKUNIN, si sono riuniti i soci ordinari CARNERA, CARRELLI, D' ERASMO (segretario), GIORDANI, LONGO, PIERANTONI, ed i corrispondenti nazionali IMBÒ, MILONE e SALFI.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell' adunanza 5 dicembre, che è approvato. Indi segnala, tra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, il volume del consocio MILONE, *L' universo e la terra.* Il socio CARNERA ne parla diffusamente, mettendone in particolare rilievo l' accurata forma letteraria da umanista e il contenuto scientifico rigorosamente preciso. Il presidente, a nome dell' Accademia, ringrazia.

Il socio Carrelli presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sull' effetto* Hall *sulle leghe di bismuto ed antimonio.*

Il socio Carnera presenta, per il medesimo periodico, una nota del prof. Tito Nicolini, « *Caratterizzazioni statistiche della pioggia totale annua di Napoli pel periodo 1866-1925* », proponendone la inserzione allorchè l' Accademia riprenderà le sue pubblicazioni. È approvata.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 febbraio 1945.

Presidenza della socia anziana Bakunin. Assistono i soci ordinari Carnera, Carrelli, Colamonico, De Dominicis, D' Erasmo (segretario), Giordani, Pierantoni, ed i corrispondenti nazionali Imbò, Milone, Nobile e Salfi.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 2 gennaio, che è approvato.

La presidente Bakunin, non vedendo presente a questa riunione il socio De Lorenzo, propone di esprimergli un voto di simpatia, insieme col desiderio, vivamente sentito da tutti i colleghi, di vederne continuata in avvenire 'opera efficace con tanta abnegazione svolta per più di un quarantennio in lavore della Società Reale di Napoli, e con la protesta per il modo con cui si fè recentemente agito contro di lui, misconoscendone l' adamantina purezza, la nobile indipendenza, la fiera dirittura del carattere, cioè le migliori prerogative del suo spirito superiore. — L' Accademia unanime si associa, incaricando il segretario di redigere e presentare analoga lettera al consocio De Lorenzo.

Il socio Carnera presenta una nota dell' ing. Ugo Madia dal titolo: *Triangolazione di III ordine nella zona occidentale della città di Napoli, con studio del Teodolite Salmoiraghi n. 22059*, proponendone l' accoglimento nel Rendiconto con le limitazioni che l' Accademia vorrà stabilire. — Come venne stabilito in altra adunanza, l' Accademia si riserva di decidere sulla stampa di questo lavoro allorchè saranno fissate le nuove tariffe con la tipografia, in rapporto con la potenzialità del proprio bilancio.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 marzo 1945.

Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Carnera, Carrelli, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Diamare, Giordani, Pierantoni, ed i corrispondenti nazionali Imbò e Milone. Presiede l' adunanza la socia anziana Bakunin, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 6 Febbraio, che è approvato. Indi comunica che in adempimento dell' incarico ricevuto egli trasmise al presidente De Lorenzo il voto dei consoci, espresso nella pre-

cedente tornata. Il consocio DE LORENZO, presente, rinnova ai colleghi i suoi ringraziamenti più vivi per il nuovo attestato di stima e di simpatia, ed assicura l'Accademia che col miglioramento delle comunicazioni e della stagione egli spera di poter partecipare, con l'assiduità abituale, alle prossime adunanze.

L'Accademia discute quindi di affari interni, occupandosi sopratutto dell'approvvigionamento della carta per le pubblicazioni in corso e delle nuove tariffe tipografiche.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 aprile 1945.

L'adunanza, alla quale assistono i soci ordinari BAKUNIN, CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, D'ERASMO, GIORDANI, LONGO, MALQUORI, PIERANTONI, ed i soci corrispondenti nazionali MILONE e NOBILE, è presieduta dalla socia anziana BAKUNIN; segretario il socio D'ERASMO. È scusata l'assenza del presidente DE LORENZO e del socio SILVESTRI.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 6 Marzo, che è approvato.

Il presidente dà notizia delle pratiche svolte dal Presidente della Società Reale allo scopo di ottenere un congruo assegno straordinario per la sollecita ripresa dell'attività accademica, e degli affidamenti ricevuti tanto da S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione quanto dalla direzione del Banco di Napoli. — L'Accademia, preso atto, con vivo compiacimento, di tale assicurazione, esprime i suoi ringraziamenti al Presidente della Società Reale per l'opera svolta con tanto successo e fa voti perchè venga indetta al più presto una riunione del Consiglio di Presidenza con l'intento di deliberare sulla ripartizione dei fondi tra le varie Accademie per l'anno 1944-45, in modo da avviare a concreta soluzione il problema della continuazione della stampa del Rendiconto e degli Atti.

Si tratta quindi, in via preliminare, delle norme statutarie che regoleranno la nuova vita accademica, e che verranno discusse ed approvate in una prossima assemblea generale della Società Reale di Napoli.

Processo verbale dell'adunanza del dì 8 maggio 1945.

Presidenza della socia anziana BAKUNIN. Assistono i soci ordinari CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, DE LORENZO, D'ERASMO (segretario), GIORDANI, MALQUORI, PIERANTONI, ed i corrispondenti nazionali IMBÒ, IPPOLITO, MILONE e SALFI.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 aprile, che è approvato.

La presidente dice di essere lieta del ritardo di una settimana con cui, d'accordo tra i soci, è stata convocata questa adunanza, anzitutto perchè la data odierna, coincidendo con la vittoria delle forze Alleate, segna la fine della cruenta guerra che per circa sei anni tante rovine e tanti lutti ha portati in Europa, e quindi il ritorno delle nazioni alle più feconde opere di pace, e poi perchè, essendosi il 5 maggio riunito il Consiglio generale della Società Reale di Napoli per la ripartizione dei fondi del corrente anno 1944-45, è ora possibile dare ai soci assicurazioni concrete sulla ripresa dell'attività accademica.

Tenuto conto dello stato attuale del Rendiconto in corso di pubblicazione, del costo della carta e delle nuove tariffe richieste dalla tipografia Genovese, come da precedente verbale, l'Accademia, dopo esauriente discussione, alla quale partecipano numerosi soci, e dopo i chiarimenti del segretario, stabilisce che, a partire dal I° Novembre 1944, le note che furono accettate per la inserzione nel Rendiconto e quelle che verranno ulteriormente ammesse siano soggette, fino a nuova disposizione, alle restrizioni seguenti. Ciascun socio può presentare note sue, o di estranei, per un limite massimo annuo di pagine otto a carico dell'Accademia (due note da 4 pagine ciascuna). Le eventuali eccedenze saranno pagate dagli autori e verranno conteggiate in ragione di lire 625 a pagina, o frazioni di pagina. Ugualmente a carico dei rispettivi autori saranno le spese per le eventuali illustrazioni e per il frontespizio e la copertina degli estratti. Per questi ultimi rimane in vigore la disposizione dell'art. 22 del Regolamento, che fissa a 100 copie il numero degli estratti da darsi gratuitamente agli autori se soci, e a 50 se estranei.

Il socio De Lorenzo ha parole di vivo rimpianto per la immatura scomparsa del Prof. Bruno Castiglioni, ordinario di Geografia nella R. Università di Pavia, il quale offertosi volontariamente per andare ad intimare la resa ad una batteria tedesca che continuava il fuoco dopo che il Comando aveva già dichiarato di arrendersi, cadeva colpito da una raffica di mitragliatrice. Spentosi a 46 anni con un gesto eroico di amor patrio e di umanità, il Castiglioni lascia numerosi lavori di geologia, morfologia e glaciologia, che trattano in special modo le Alpi Dolomitiche e l'Appennino centrale. Il socio Colamonico si associa, ricordando la brillante carriera e le molteplici benemerenze dell'estinto, tanto nel campo scientifico che in quello didattico.

Processo verbale dell'adunanza del dì 5 giugno 1945.

Assistono all'adunanza, presieduta dal socio De Lorenzo, i soci ordinari Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Malquori, Pierantoni, Silvestri. Scusa l'assenza la socia Bakunin.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 8 maggio, che è approvato. Indi comunica la lettera 12 maggio del presidente della Società Reale, relativa all'assegnazione di fondi straordinari per l'anno 1944-45, destinati alle pubblicazioni accademiche.

Il socio COLAMONICO presenta ed offre in omaggio due suoi lavori: *Le carte geografiche*, e *Lezioni di geografia fisica*. Il socio SILVESTRI offre pure in omaggio un gruppo di suoi recenti lavori entomologici, fra i quali viene segnalato il secondo volume della parte speciale del *Compendio di Entomologia applicata*. — Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Il segretario presenta, da parte del socio corrispondente IPPOLITO, che ne propone l'inserzione nel Rendiconto, una nota II del dott. Felice IPPOLITO dal titolo: *Intorno ad una nuova teoria sull'origine del Sial e sull'orogenesi*. È approvata.

Il socio MALQUORI presenta una nota del prof. Vittorio CIRILLI sulla *Reagibilità allo stato solido fra silico-alluminati alcalini e ossidi alcalino-terrosi*, nota I: *miscele leucite-calce*, e un'altra della sig. na O. AMATI sopra *Il caolino del territorio di Capalbio (Grosseto)*, e ne discorre, proponendo che vengano accolte per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Il socio COLAMONICO presenta, per lo stesso periodico, una sua nota su *Le zone di più bassa piovosità nell'Italia peninsulare*, e ne parla. Altrettanto fa il socio DIAMARE presentando una sua comunicazione dal titolo; *Miofibrille e loro bande*.

Il presente verbale è redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 novembre 1945.

Presidenza della socia BAKUNIN. Sono presenti i soci ordinari CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, DE LORENZO, D'ERASMO (segretario), GIORDANI, LONGO, MATTIOLI, PIERANTONI e SPAMPINATO, e i soci corrispondenti nazionali MILONE, NOBILE e SCHERILLO.

Il segretario comunica i ringraziamenti delle famiglie RIZZO e CASTIGLIONI per le condoglianze espresse dall'Accademia. Indi partecipa che le sedute ordinarie per l'anno 1945-46 sono state fissate dal Consiglio di Presidenza alle ore 11 del primo martedì dei mesi da novembre a giugno.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato il volume 1943 degli *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*.

Il socio CARNERA espone brevemente alcuni risultati ottenuti nei calcoli definitivi delle stazioni internazionali dedotti dalle osservazioni del sessennio 1935-41. Per la stazione di La Plata, che per omogeneità di distribuzione di osservazioni meglio si prestava ad un'indagine preliminare, si è potuto mettere in luce in modo non dubbio che la latitudine è soggetta, durante

il giorno lunare, ad una variazione periodica, che ricorda gli spostamenti della verticale provocati dalle maree della crosta solida della terra. L'ampiezza della variazione risulta circa doppia di quella dovuta alla marea solida ed è dell'ordine di 0″. 03 — 0″. 04. Non è improbabile che questa variazione debba attribuirsi anzitutto all'effettivo spostamento della verticale prodotto dall'accennata marea solida, e poi a periodiche variazioni refrazionali dovute ad analoghe maree della nostra atmosfera, ed infine a variazioni che dovranno essere apportate nel calcolo dei termini a corto periodo della nutazione in conseguenza delle ultime più precise determinazioni della massa lunare, dedotte recentemente da Sir H. SPENCER JONES dalle osservazioni del pianetino Eros in occasione della campagna per la parallasse del sole.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 dicembre 1945.

All'adunanza, presieduta dalla socia anziana BAKUNIN, partecipano i soci ordinari CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, DE LORENZO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, MALQUORI, PIERANTONI ed i corrispondenti nazionali IMBÒ, MILONE e SCHERILLO.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 6 novembre, che è approvato.

Il socio CARRELLI presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *La moderna concezione delle particelle elementari.*

L'Accademia tratta infine questioni di amministrazione interna.

INDICE DEL VOLUME

INDICE

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI